

Article, Published Version

**Tödten, H.**

## **Untersuchung der Strömungsvorgänge an Buhnen**

Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau

---

Verfügbar unter/Available at: <https://hdl.handle.net/20.500.11970/103002>

Vorgeschlagene Zitierweise/Suggested citation:

Tödten, H. (1975): Untersuchung der Strömungsvorgänge an Buhnen. In: Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau 37. Karlsruhe: Bundesanstalt für Wasserbau. S. 1-48.

### **Standardnutzungsbedingungen/Terms of Use:**

Die Dokumente in HENRY stehen unter der Creative Commons Lizenz CC BY 4.0, sofern keine abweichenden Nutzungsbedingungen getroffen wurden. Damit ist sowohl die kommerzielle Nutzung als auch das Teilen, die Weiterbearbeitung und Speicherung erlaubt. Das Verwenden und das Bearbeiten stehen unter der Bedingung der Namensnennung. Im Einzelfall kann eine restriktivere Lizenz gelten; dann gelten abweichend von den obigen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Documents in HENRY are made available under the Creative Commons License CC BY 4.0, if no other license is applicable. Under CC BY 4.0 commercial use and sharing, remixing, transforming, and building upon the material of the work is permitted. In some cases a different, more restrictive license may apply; if applicable the terms of the restrictive license will be binding.



Dipl.-Ing. H. T ö d t e n

## UNTERSUCHUNG DER STRÖMUNGSVORGÄNGE AN BUHNEN

Investigation of flow around groynes

### Zusammenfassung

Bei der Berechnung der Wasserspiegellagen in Flüssen in einem mathematischen Modell ist der Einfluß von Buhnen oft von entscheidender Bedeutung. Zur Klärung dieses Einflusses wurden zunächst die grundlegenden Strömungsvorgänge an Buhnen untersucht. Dabei waren von besonderer Bedeutung die Geometrie und die Energiedissipation der Ablösungszonen. Die Kenntnis dieser beiden Größen ist Voraussetzung für die Formulierung eines mathematischen Modelles.

### Summary

Computing the water surface in channels in a mathematical model, the influence of groynes is often important. To clear this influence, the flow pattern around groynes has been investigated. Of special importance was the geometry and the energy dissipation of the wake. Considering the effect of groynes, the knowledge of these two parameters is essential to formulate a mathematical model.

## I n h a l t

	Seite
1. Einleitung	3
2. Prinzipielle Problemstellung	3
2.1    Potentialtheoretische Behandlung	4
2.11    Die Diskontinuitätsfläche	4
2.12    Die Wirbelbewegung	9
2.2    Zähe Flüssigkeiten	11
2.21    Ausbildung der Grenzschicht	11
2.21.1 Die Dissipation in der Grenzschicht	13
2.22    Wirbel in zähen Flüssigkeiten	15
2.22.1 Laminare Wirbel	15
2.22.2 Turbulente Wirbel	16
3. Literaturübersicht	21
4. Zusammenfassung der Ergebnisse	38
4.1    Geometrie der Wirbelzone	38
4.2    Energiedissipation	40
5. Stabilitätsbetrachtung	43
6. Zusammenfassung	44
7. Bezeichnungen	45
8. Schrifttum	47

## 1. Einleitung

Bei der Berechnung von Wasserspiegellagen in Flüssen taucht immer wieder die Frage auf, in welchem Maße Buhnen den Wasserspiegel beeinflussen.

Bei der iterativen Berechnung in einem mathematischen Modell werden i.a. alle Einflüsse, die eine Energieumwandlung zur Folge haben, über einen Koeffizienten erfaßt, wobei dieser in einem Abflußbeiwert - z.B. im sogenannten  $k$ -Wert nach STRICKLER - enthalten sein kann, oder durch einen Zahlenwert zum Ausdruck kommt, der die Differenz der Geschwindigkeitshöhen zweier benachbarter Profile abmindert ( $\beta$ -Wert).

Es besteht nun die Möglichkeit, den Einfluß der Buhnen ebenfalls über den  $k$ -Wert oder den  $\beta$ -Wert zu erfassen. Bei der Wasserspiegelberechnung würden dann Werte gewählt werden, die den Verhältnissen nahekommen, oder es werden durch eine Eichung alle Einflüsse pauschal erfaßt. Beides ist gleichermaßen unbefriedigend, da solche empirischen Verfahren grundsätzlich keine Allgemeingültigkeit im strengen Sinn für sich beanspruchen können und ihre Ergebnisse nur in engen Grenzen übertragbar sind. Im Falle des  $k$ -Wertes nach STRICKLER muß man ein solches Verfahren sogar als falsch ansehen.

Es ist deshalb erforderlich, vor einer allgemeinen Formulierung des Problems im mathematischen Modell, die komplexen Vorgänge zu zerlegen, d.h. zu analysieren, um dann durch eine Synthese der Einzelergebnisse zu einer möglichst allgemeinen Aussage zu kommen.

Die folgende Arbeit soll ein Beitrag zu einer solchen Analyse sein. Das Objekt der Untersuchung ist die Wasserbewegung in Wirbeln und die damit verbundene Energiedissipation, durch welche schließlich der Einfluß der Buhnen zum Ausdruck kommt. Das grundlegende Problem, das hier zu behandeln ist, ist somit der Ablösewirbel, der sich nach einer plötzlichen Erweiterung - oder allgemeiner gesprochen: nach einer Unstetigkeit der Flüssigkeitsberandung - ausbildet.

Nach einem allgemeinen Überblick über Wirbelbewegung und Dissipation wird das Problem anhand der in der Literatur durchgeführten Arbeiten diskutiert, wobei kein Anspruch auf Vollständigkeit der zitierten Literatur erhoben wird. Allen Betrachtungen liegt eine ebene, stationäre Strömung zugrunde.

Es ist beabsichtigt, in einer folgenden Arbeit die gefundenen Ergebnisse auf die praktische Berechnung von Buhnenstrecken anzuwenden und in einem Rechner-Programm für stationäre Wasserspiegel zu verarbeiten.

## 2. Prinzipielle Problemstellung

Es sei  $G$  ein von einer Flüssigkeit durchströmtes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit der Berandung  $R$ . Sind auf  $R$  Unstetigkeitsstellen, so wird sich - ausgehend von dieser Unstetigkeit - eine Diskontinuität in der Bewegung der Flüssigkeit entwickeln, die dazu führt, daß  $G$  durch die Diskontinuitätsfläche  $\Sigma$  in zwei Gebiete  $G_0$  und  $G_1$  geteilt wird. Im allgemeinen



Fall wird man in den beiden Gebieten unterschiedliche Strömungszustände vorfinden. Die Fläche selbst ist stetig gekrümmt, die Flüssigkeitsbewegung in den Teilgebieten stetig. Sei  $P$  ein Punkt auf  $\Sigma$ , so sind die Tangentialgeschwindigkeiten im Punkt  $P$  in  $G_0$  und  $G_1$  im allgemeinen verschieden. Daraus folgt aber auch, daß eine Diskontinuitätsfläche sich wie eine Wirbelfläche verhält [6] und mathematisch auch wie eine solche behandelt werden kann. Da die Dichte  $\rho$  auf  $\Sigma$  eine sprungweise Änderung erfahren darf [1], so ist bei inkompressiblen Flüssigkeiten auch der Fall möglich, daß zwei unterschiedliche, homogene Flüssigkeiten ( $\rho_0 \neq \rho_1$ ) aneinandergleiten.

Nach dem oben Gesagten sind dann beispielsweise folgende zwei Bewegungen in  $G_0$  und  $G_1$  möglich:

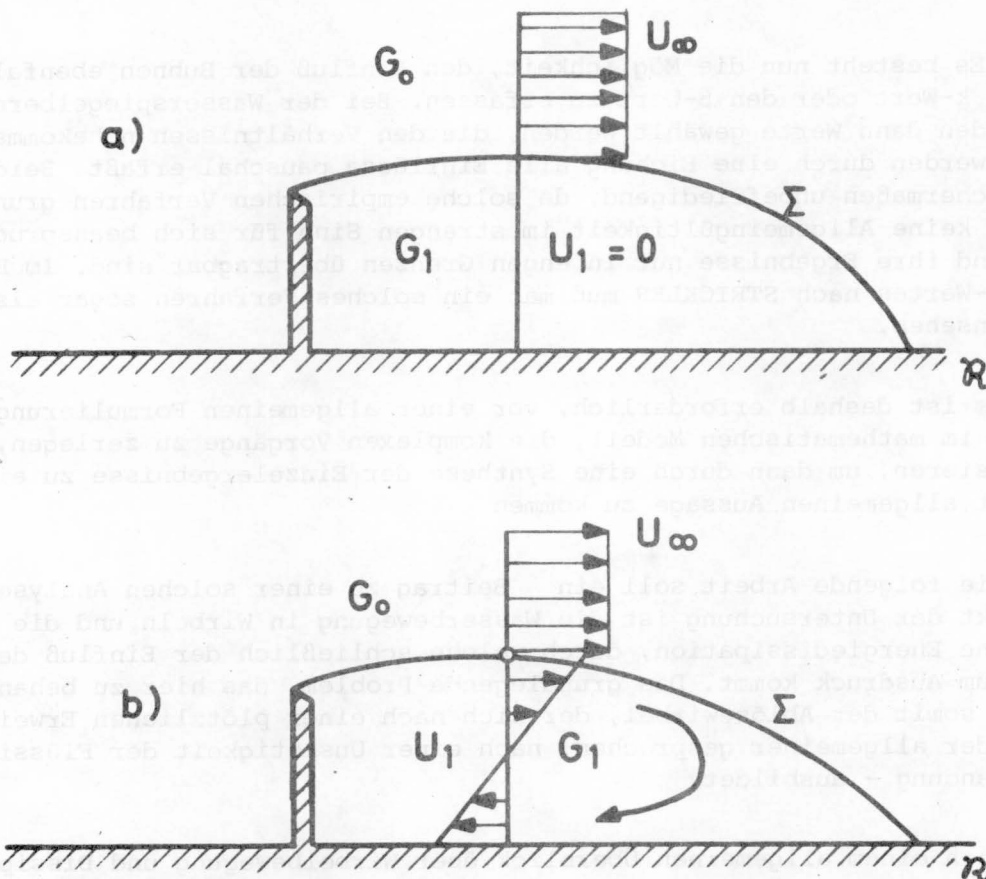


Abb. 2.1 Strömungsformen nach Unstetigkeiten

wobei im Fall a) der Abb. 2.1 die Fläche  $\Sigma$  das durchströmte Gebiet von einem "Totwassergebiet" trennt und im Fall b) durch  $\Sigma$  ein Wirbel eingeschlossen wird.

## 2.1 Potentialtheoretische Behandlung

### 2.11 Die Diskontinuitätsfläche

Die potentialtheoretische Behandlung der Fläche  $\Sigma$  geht auf HELMHOLTZ [2] zurück, wobei er eine Funktionalgleichung für das Verhalten des komplexen Potentials auf  $\Sigma$  verwendete. Später wurde die Aufgabe in allgemeinerer Form über die Methode der konformen Abbildung von KIRCHHOFF [3] behandelt.

Bei den natürlichen, reibungsbehafteten Flüssigkeiten resultiert die Ablösung und die Ausbildung einer Diskontinuitätsschicht aus den Eigenschaften der Grenzschicht zwischen der Flüssigkeit und der festen Berandung. Da die Grenzschicht als eine Folge der äußeren, festen Berandung angesehen werden kann, sind bei einer natürlichen Flüssigkeit die Kräfte, die zur Diskontinuität der Bewegung führen, äußere, nicht-konservative Kräfte.

In einer idealen Flüssigkeit, deren Bewegung aus einem Potential folgt, können solche Ablösungen nur durch Wirkung konservativer Kräfte entstehen. Daß dies möglich ist, hat HELMHOLTZ gezeigt. Um den Gedanken zu begründen, sei kurz auf die mathematischen Grundlagen eingegangen:

Die Kontinuitätsgleichung in der Ebene lautet für eine inkompressible Flüssigkeit im stationären Fall:

$$\nabla \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

Sei durch die Funktion  $\Phi(x,y)$  ein Geschwindigkeitspotential gegeben, so ist der Gradient des Feldes

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.2)$$

und die Komponenten lauten:

$$u = \partial \Phi / \partial x, \quad v = \partial \Phi / \partial y \quad (2.3)$$

Mit Gl. (2.3) geht Gl. (2.1) über in die LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta \Phi = 0 \quad (2.4)$$

Der Differentialgleichung (2.4) genügt die komplexe Funktion

$$\zeta = f(z) \quad (2.5)$$

mit

$$\zeta = \phi + i\psi$$

$$z = x + iy$$

Für Gl. (2.5) gilt somit

$$\phi + i\psi = x + iy \quad (2.6)$$

und gibt damit die Abbildung eines Gebietes  $T$  der  $Z$ -Ebene auf ein Gebiet  $T^*$  der  $\zeta$ -Ebene wieder. Die Größen  $\phi$  bzw.  $\psi$  stellen die Strom- bzw. die Potentialfunktion dar und sind über die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen verknüpft:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Diese Gleichungen besagen, daß die Kurven  $\psi = \text{const.}$  und  $\phi = \text{const.}$  lotrecht aufeinander stehen.

Die Ähnlichkeit der Abbildung ist in jenen Punkten nicht gegeben, wo der Differentialquotient

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.8)$$

zu Null wird. In diesen Punkten geht die Geschwindigkeit gegen Null oder gegen Unendlich. Insbesondere strebt die Geschwindigkeit an den hier betrachteten Unstetigkeiten gegen Unendlich. Da der Druck der Geschwindigkeit umgekehrt proportional ist, muß es eine Stelle im Strömungsfeld geben, an welcher er negativ wird. Dieser Druck, bezogen auf eine Einheitsfläche, kann als innere Kraft gedeutet werden, die, da sie aus einem Potential folgt, konservativ ist und mit den Bedingungen der Potentialströmung im Einklang steht. An dieser Stelle kommt es zu einer Diskontinuität in der Bewegung mit einer Diskontinuitätsfläche  $\Sigma$ .

Nach HELMHOLTZ sind die Voraussetzungen für die Existenz einer solchen Fläche die, daß der Druck auf beiden Seiten der Fläche gleich sein muß und die normal auf  $\Sigma$  stehenden Geschwindigkeitskomponenten gleichen Betrag haben müssen. Aus der Bedingung für den Druck folgt nach BERNOULLI, daß die tangentielle Komponente in der gesamten Fläche konstant sein muß.

Wir betrachten das Gebiet  $G$  mit der festen Berandung  $R$ . Von  $R$  wird gefordert, daß sie sich aus geraden Teilstücken zusammensetzt. Eine Gerade der Länge  $\overline{AB}$  schneide das Gebiet auf und stehe senkrecht auf  $R$  (Abb.2.2)

Es entwickelt sich von  $B$  aus eine Diskontinuitätsfläche  $BC_1$ . Die Stromfunktion ist entlang den festen Wänden nach Richtung und Geschwindigkeit zumindest abschnittsweise konstant. Die Funktion  $f(x + iy)$  ist dann so zu bestimmen, daß sie den Randbedingungen genügt und im Innern des Gebietes  $G$  die Unstetigkeit beschreibt. Es wird dabei gefordert, daß die Funktionen in  $G_0$  und  $G_1$  sowie auf den Rändern ( $R$  u.  $\Sigma$ ) bis zur zweiten Ableitung stetig sind.

Wir wenden uns zunächst dem Gebiet  $G_0$  zu, das durch den festen Rand und die Stromlinie  $\overline{BC_1}$  begrenzt wird.

Die Strömung in der Z-Ebene (Abb. 2.3 a)) kann durch die Funktion

$$\bar{w} = |w| e^{-i\sigma} \quad (2.9)$$

bzw.

$$\ln \bar{w} = \ln |w| - i\sigma \quad (2.10)$$

in die W-Ebene (Abb. 2.3 b)) abgebildet werden [5]. Mit Gleichung (2.9) bzw. (2.10) wird aus der gesamten Bildebene  $T^*$  ein Bereich ausgeschnitten, auf dem die gesuchte Strömung ähnlich abgebildet wird. Das Argument  $\sigma$  ist der Richtungswinkel der Geschwindigkeit. Nach Gl. (2.10) wird die Funktion längs des Randes teils durch den konstanten Realteil  $\ln |w|$ , teils durch den Imaginärteil  $i\sigma$  beschrieben. Ist das Strömungsbild in der W-Ebene bestimmt, und damit der freie Strahlrand in dieser Bildebene gefunden, so erhält man die Gleichung für den gesuchten Strahlrand in der Ursprungsebene durch Rücktransformation über die Gleichung

$$z = \int \frac{1}{\bar{w}} \frac{d\bar{w}}{d\bar{w}} d\bar{w} \quad (2.11)$$

Im vorliegenden Fall wird das komplexe Potential  $\Phi$  durch eine Quell-Senkenströmung beschrieben.

Das Verfahren wird von BETZ [5] beschrieben, so daß es genügt, hier die endgültigen Gleichungen anzuschreiben.

Man erhält mit den Bezeichnungen der Abb. 2.4:

$$x = \frac{U_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{1+\cos \gamma}{1-\cos \gamma} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{U_0} + v_1 \right) \ln \frac{1+v_1^2+2U_0 \cos \gamma}{1+v_1^2-2U_0 \cos \gamma} \right] \quad (2.12)$$

$$y = h + \frac{U_0}{2\pi} \left( \frac{1}{U_0} - v_1 \right) \left[ \arctan \frac{2U_0}{1-U_0^2} + \arctan \left( \frac{2U_0}{1-U_0^2} \sin \gamma \right) \right] \quad (2.13)$$

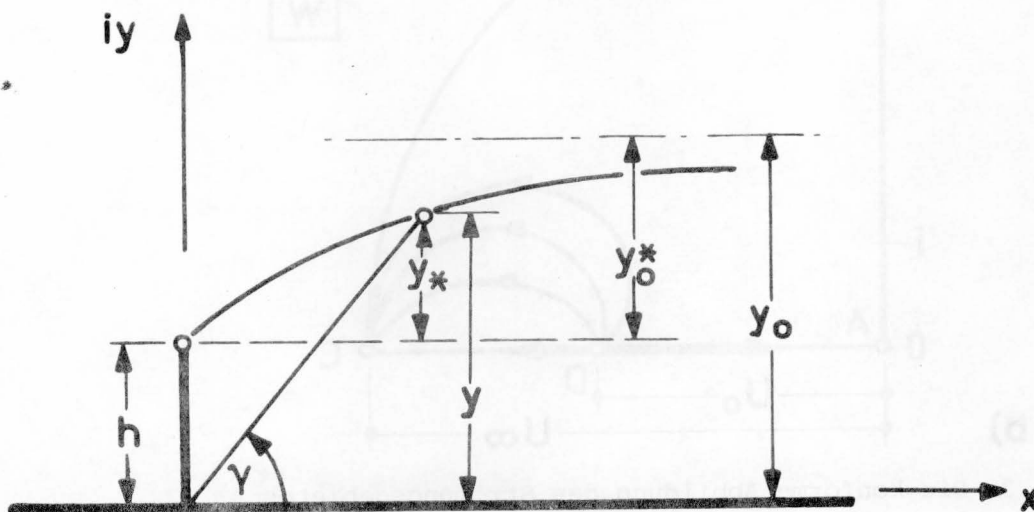


Abb. 2.4 Zur Erläuterung der Gln (2.12) u. (2.13)

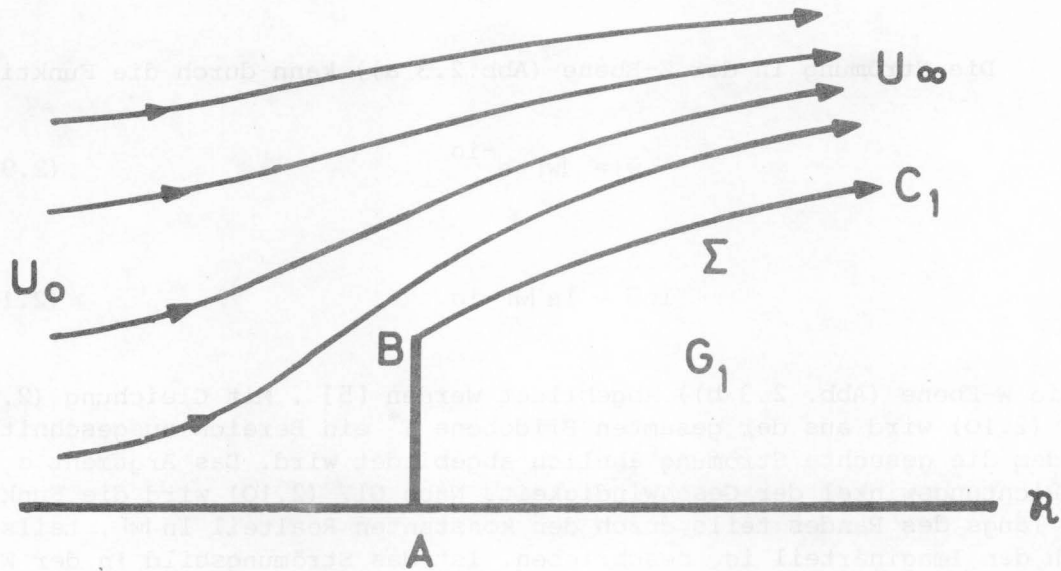


Abb. 2.2 Berandung des Strömungsgebietes

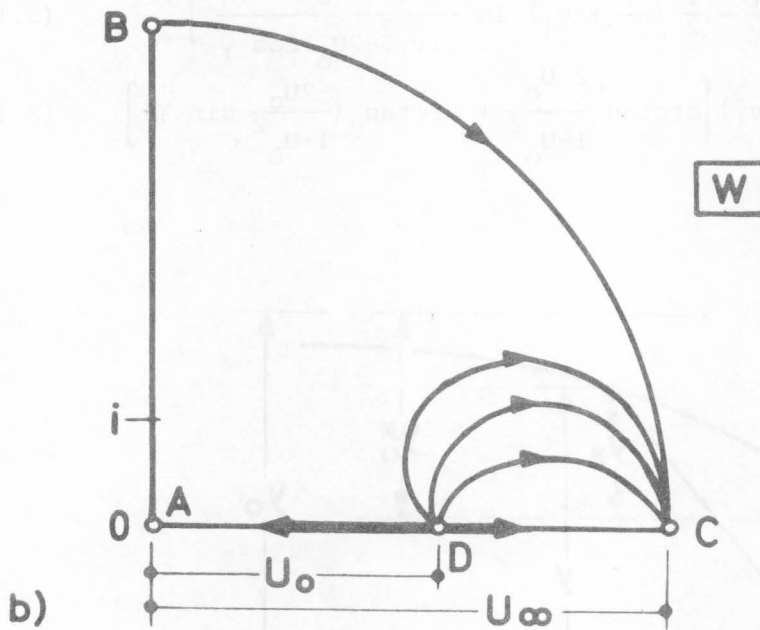
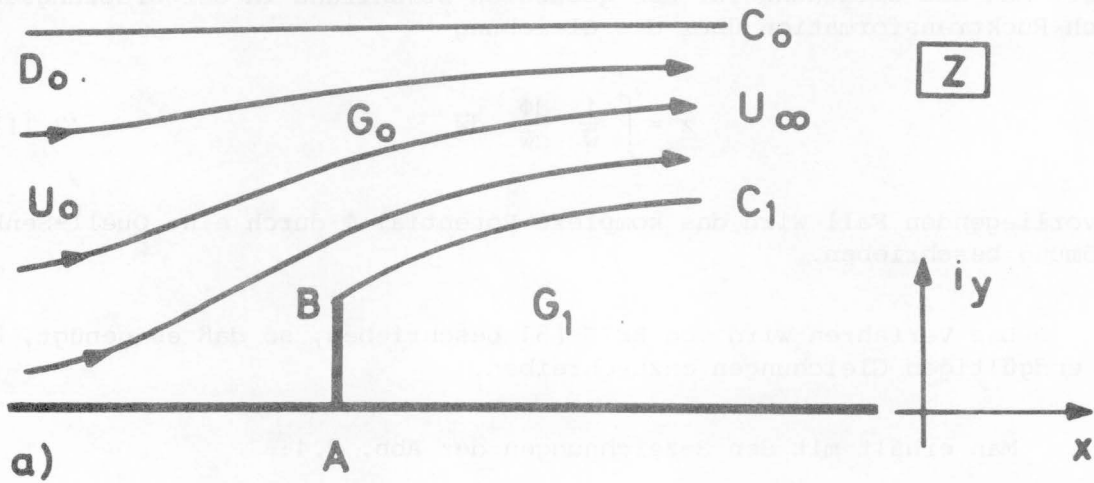


Abb. 2.3 Die konforme Abbildung des Strömungsgebietes



Es ist zu beachten, daß die Geschwindigkeiten so normiert wurden, daß  $U_{\infty} = 1$ , wird. Damit gilt immer  $U_0 \neq 1$ , weshalb Gl. (2.13) definiert ist. Der Strahlrand nähert sich einer Asymptote im Abstand  $y_0^* = y_0 - h$  vom Rand. Für  $\gamma \rightarrow 0$  gilt:

$$y_0^* = \frac{U_0}{2\pi} \left( \frac{1}{U_0} - U_0 \right) \arctan \Pi + k \cdot \kappa \quad (2.14)$$

$$\Pi = \frac{2 U_0}{1 - U_0^2}$$

wobei  $\kappa$  eine Konstante ist und  $k = 1, 2, 3, \dots$  wird. Betrachten wir nur die Hauptwerte von  $\arctan \Pi$ , so wird  $\kappa = 0$  und  $y_0^* = f(U_0)$  ist die Asymptote an die Randstromlinie  $\Sigma$ .

## 2.12 Die Wirbelbewegung

Da die Potentialströmung, wie sie bisher behandelt wurde, nur auf ideale Flüssigkeiten anwendbar ist, bietet dieses Verfahren keine Möglichkeit, die Entstehung von Wirbeln zu beschreiben, weil nach HELMHOLTZ [6] in einer drehungsfreien Flüssigkeit keine Wirbel entstehen oder verschwinden können.

Auch schließt das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials die Existenz einer Rotationsbewegung der Wasserteilchen aus. In einem konservativen System gilt das selbst für reibungsbehaftete Flüssigkeiten [7] [8].

Trotzdem soll hier kurz auf die Wirbelbewegung eingegangen werden. Es ist grundsätzlich zu unterscheiden zwischen einer Wirbelbewegung im Sinne des HELMHOLTZ'schen Wirbels und einer rotationsfreien Translationsbewegung auf einer Kreisbahn. Die letztere resultiert aus einem Geschwindigkeitspotential und wird deshalb auch "Potentialwirbel" genannt.

Einen solchen Potentialwirbel kann man aus einer Quellenströmung der Form

$$w = c \cdot \ln z \quad (2.15)$$

ableiten. Dies geschieht durch Drehung der GAUSS'schen Zahlenebene um  $90^\circ$ . Es wird dann mit

$$z = r \exp(i\gamma)$$

aus Gl. (2.15):

$$w = i\phi + \psi = i c \ln z = i c \ln r - c\gamma \quad (2.16)$$

Eine solche translatorische Kreisbewegung ist bis auf ihren Mittelpunkt wirbelfrei. Der Mittelpunkt oder der Kern eines solchen Potentialwirbels stellt nach Gl. (2.8) einen singulären Punkt dar und muß bei der Behandlung nach der Potentialtheorie herausgeschnitten werden. Während im wir-

Im freien Bereich die Zirkulation  $\Gamma$  entlang einer Stromlinie verschwindet, ist im Kernbereich die Zirkulation proportional dem Quadrat des Abstands  $r$ :

$$\Gamma = 2 \pi \omega r^2 \quad (2.17)$$

Die Abb. 2.5 zeigt die Verteilung der Geschwindigkeit in einem Wirbel [9], [10].

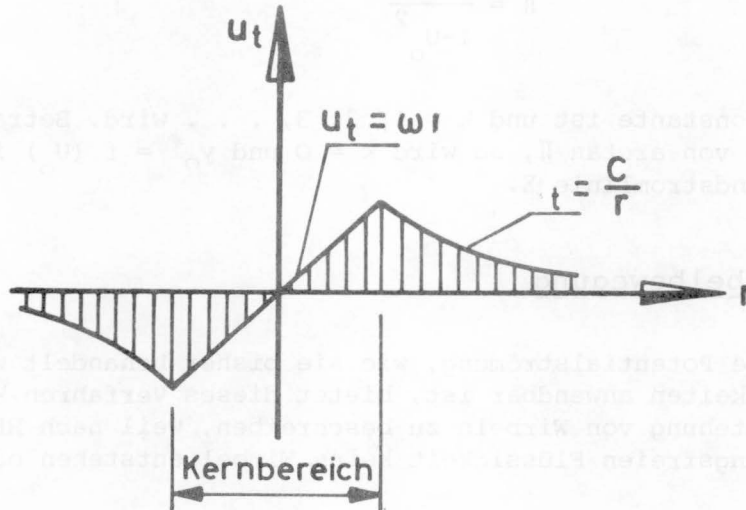


Abb. 2.5 Geschwindigkeitsverteilung im Wirbel

Der Kern ist also ein Wirbel im Sinne der HELMHOLTZ'schen Gleichungen. Hier führen die Flüssigkeitsteilchen neben der Deformation und Translation noch eine Drehbewegung aus. Es gilt, wenn  $\vec{v}$  das Geschwindigkeitsfeld darstellt

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = 2\omega$$

mit  $\omega$  als Winkelgeschwindigkeit.

In einem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  für welches gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} C \cdot z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wie z.B. im Kern eines Potentialwirbels, wird immer

$$\nabla \times \vec{v} \neq 0$$

sein. Wegen

$$\text{div } \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{div rot } \vec{v} = 0 \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

ist ein Wirbelfeld immer quellenfrei.



## 2.2 Zähe Flüssigkeiten

Die potentialtheoretische Behandlung der Strömung erlaubt nur eine generelle Darstellung der Strömungsformen. Die Methode versagt, wenn Aussagen über Vorgänge gefordert werden, die auf nicht-konservative Kräfte zurückgehen.

So findet die formale Behandlung der Diskontinuitätsfläche durch HELMHOLTZ erst die richtige Erklärung, wenn man die Energieverhältnisse betrachtet, einschließlich jener Energieformen, die sich aus den Eigenschaften der natürlichen Flüssigkeiten ergeben [8].

### 2.21 Ausbildung der Grenzschicht

Bei dem hier zu behandelten Fall wird man es mit einer Strömung zu tun haben, wie sie schematisch in Abb. 2.1 b) dargestellt ist. Bei der Behandlung des Problems kann man ein in der Weise vereinfachtes Modell zugrundelegen, daß das Rückströmungsgebiet zwischen der Randstromlinie  $\Sigma$  und dem Rand R wie ein fester umströmter Körper behandelt wird. Entlang der nunmehr festen Randlinie, die mit  $\Sigma'$  bezeichnet werden soll, wird sich zwischen ihr und der äußeren Potentialströmung eine Grenzschicht entwickeln, welche für die Dissipation entlang des Körpers verantwortlich ist (Abb. 2.6).

Es sei hier bereits bemerkt, daß dieses Modell die Verhältnisse insofern unvollkommen beschreiben muß, als der Energieaustausch zwischen dem Rückströmgebiet  $G_1$  und dem Gebiet  $G_0$  nicht erfaßt werden kann.

Nach SCHLICHTING [12] können die Grenzschichtgleichungen der ebenen Platte auch auf gekrümmte Wände übertragen werden, sofern die Krümmungsänderung nicht zu stark ist. Diese Voraussetzung kann hier als erfüllt angesehen werden.

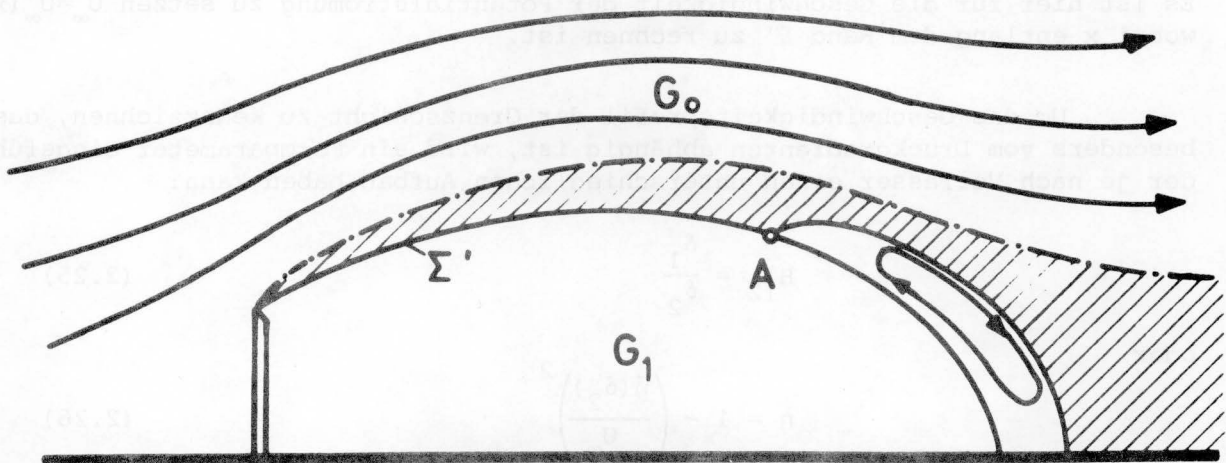


Abb. 2.6 Entwicklung der Grenzschicht entlang der Rückströmungszone

Der Punkt A in Abb. 2.6 bezeichnet den Ablösungspunkt der Grenzschicht. Sofern die Grenzschicht laminar ist, gilt für ihre Entwicklung mit der Lauflänge  $x$  [13] :

$$\delta(x) = 4,64 \sqrt{vx/U_\infty} \quad (2.19)$$

wenn die Geschwindigkeitsverteilung durch ein Polynom 3. Grades angenähert wird, oder es ist

$$\delta(x) = 5,83 \sqrt{vx/U_{\infty}} \quad (2.20)$$

wenn ein Polynom 4. Grades zugrunde liegt. Im Mittel kann man mit guter Näherung setzen:

$$\delta(x) = 5 \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}} \quad (2.21)$$

Der Umschlag laminar-turbulent äußert sich in einem starken Anwachsen der Grenzschicht, deren Gleichung dann bei verschwindendem Druckgradienten und beim 1/7-Potenzgesetz lautet [12] :

$$\delta(x) = 0,37 x \left( \frac{U_{\infty} x}{\nu} \right)^{-1/5} \quad (2.22)$$

Zur weiteren Beschreibung der Grenzschicht sind noch die folgenden Größen wichtig:

Die Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \right) dy \quad (2.23)$$

und die Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \left( 1 - \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \right) dy \quad (2.24)$$

Es ist hier für die Geschwindigkeit der Potentialströmung zu setzen  $U_{\infty} = U_{\infty}(x)$ , wobei  $x$  entlang dem Rand  $\Sigma'$  zu rechnen ist.

Um das Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht zu kennzeichnen, das besonders vom Druckgradienten abhängig ist, wird ein Formparameter eingeführt, der je nach Verfasser einen unterschiedlichen Aufbau haben kann:

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.25)$$

oder

$$\eta = 1 - \left( \frac{\bar{u}(\delta_2)}{U_{\infty}} \right)^2 \quad (2.26)$$

Da der Druckgradient verantwortlich ist für die Ablösung der Grenzschicht, müssen folglich auch die Formparameter  $H_{12}$  bzw.  $\eta$  geeignet sein, den Ablösungspunkt zu bestimmen. So ergibt sich die Ablösung bei folgenden Werten:

$$H_{12} \approx 1.8 \text{ bis } 2.4$$

$$\eta \approx 0.8$$

### 2.21.1 Die Dissipation in der Grenzschicht

Die in der Grenzschicht dissipierte Energie steht im engen Zusammenhang mit der Verteilung der turbulenten Schubspannungen. Für diese Verteilung gibt ROTTA [14] die folgende Potenzreihe an:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} = 1 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 \dots \quad (2.30)$$

Für die Koeffizienten gelten die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \alpha (B - B_0) \\ a_2 &= - (3 + 2a_1) \\ a_3 &= 2 + a_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

In der Strömung mit Gleichdruck ist  $\alpha=0$  und bei Druckanstieg ist  $\alpha>0$ .  $B_0$  ist der Profilparameter bei konstantem Druck ( $B_0 \approx 0,9$ ), und  $B$  wiederum bei veränderlichem Druck.

Die Wandschubspannung errechnet sich nach [12]

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2(x)} = \beta \left( \frac{U_\infty(x) \delta_2}{\nu} \right)^{-1/n} \quad (2.32)$$

$$n = 4 \quad \beta = 0,0128$$

$$n = 6 \quad \beta = 0,0065$$

Wie folgende Gleichung zeigt, ist die Wandschubspannung sehr stark vom Formparameter  $H_{12}$  abhängig (Abb. 2,7)

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,123 \cdot 10^{-0,678 H_{12}} \left( \frac{U_\infty \delta_2}{\nu} \right)^{-0,268} \quad (2.33)$$

Diese starke Abhängigkeit gilt auch für die Profile der Schwankungsgeschwindigkeiten [14][15].

Da die Schubspannungen einerseits proportional dem Geschwindigkeitsgradienten sind und andererseits in engem Zusammenhang mit der Dissipation stehen, kann man folgende Gleichung für die Reibungsarbeit in der Grenzschicht aufstellen [12] [14]:

$$\frac{\epsilon_v + \epsilon_t}{\rho U_\infty^3} = \int_0^\delta \frac{\tau}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{u}}{U_\infty} \right) dy$$

$$U_\infty = U_\infty(x)$$

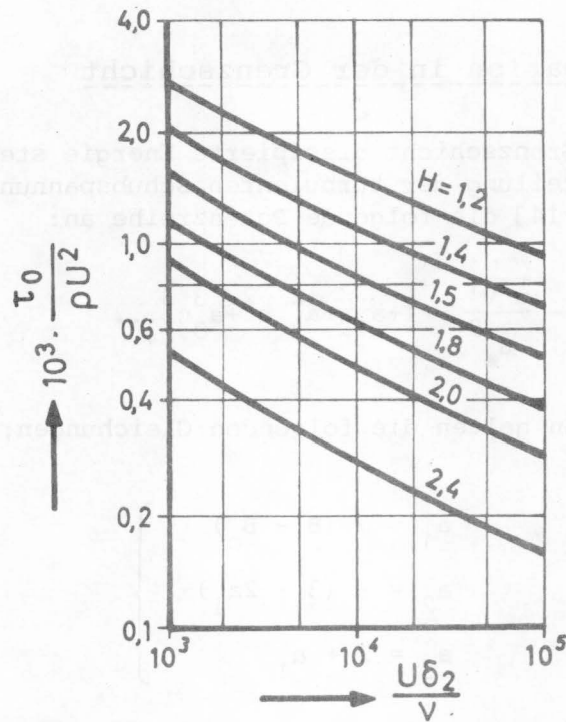


Abb. 2.7 Turbulente Wandschubspannung nach Gl. (2.33) [12]

Dabei ist  $\epsilon_v$  die in Wärme umgewandelte Energie und  $\epsilon_t$  die Turbulenzenergie. Letztere kann gegen  $\epsilon_v$  vernachlässigt werden, womit man erhält

$$\frac{\epsilon_v}{\rho U_\infty^3} = \frac{0,56 \cdot 10^{-2}}{(U_\infty \delta_2 / \nu)^{1/6}} \quad 2.34)$$

Wie Abb. 2.8 zeigt, ist - im Gegensatz zur Wandschubspannung - die Dissipation kaum vom Formparameter  $H_{12}$  abhängig.

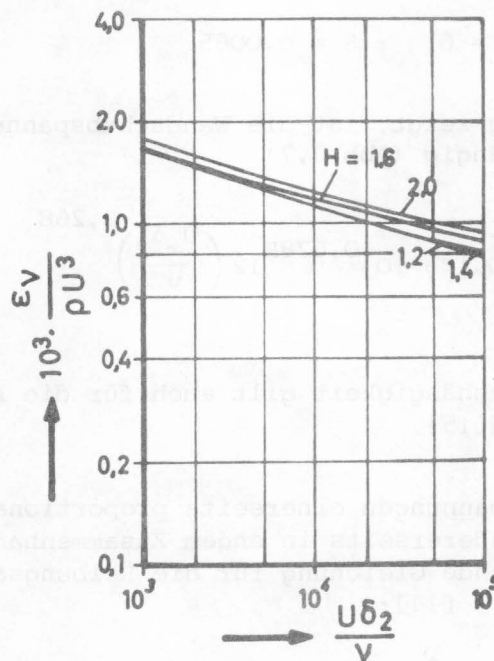


Abb. 2.8 Turbulente Dissipation [12]

## 2.22 Wirbel in zähen Flüssigkeiten

### 2.22.1 Laminare Wirbel

Während in einer idealen Flüssigkeit mit  $\text{rot } \vec{v} = 0$  auch unter Einfluß der festen Berandung die Rotation identisch Null ist, liegen die Verhältnisse bei einer mit Zähigkeit behafteten Flüssigkeit komplizierter. Hier kann z.B. eine Unstetigkeit in der Berandung einen Wirbeleintrag verursachen. Nach ROSENHEAD [16] kann man die gesamte Berandung als eine linienförmig verteilte "Zirkulationsquelle" ansehen. Diese Vorstellung entspricht auch der Grenzsichthypothese, wenn man die Grenzschicht als Zone der Wirbelproduktion auffaßt. Bei dieser Betrachtung ergäbe sich dann das Geschwindigkeitsfeld nach dem Gesetz von BIOT-SAVART aus der Gleichung

$$\vec{v} = \int \frac{\Gamma \times \vec{r}}{4\pi r} dU \quad (2.35)$$

Die Gl. (2.35) besagt, daß die Zirkulation  $\Gamma$  in jedem Volumenelement  $dV$  eine Rotation induziert für die Flüssigkeit im Abstand  $\vec{r}$  vom Element  $dV$  mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi r^3} dU \quad (2.36)$$

Bezeichnend für eine zähe Flüssigkeit ist besonders die zeitliche Entwicklung eines Wirbels. Wenn im Punkt  $r = 0$  zur Zeit  $t = 0$  ein Wirbel erzeugt wird, so ändert sich seine Wirbelstärke <sup>1)</sup>  $\Omega$  mit der Zeit nach der Gleichung

$$\Omega = \frac{a}{t} \exp(-r^2/4 \nu t) \quad (2.37)$$

Mit  $a = \Gamma/8\pi\nu$  lautet die Funktion  $\Gamma(t)$  :

$$\Gamma_t = \Gamma \left[ 1 - \exp(-r^2/4 \nu t) \right]$$

und die tangentielle Geschwindigkeit wird zu

$$u_t = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp(-r^2/4 \nu t) \right] \quad (2.38)$$

Die Gl. (2.37) ist identisch mit der Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung; es ist daher naheliegender, von einer "Diffusion" der Wirbelstärke bzw. Zirkulation zu sprechen, wenn man deren zeitliche Änderung als Folge der Energiediffusion betrachtet.<sup>2)</sup>

1) Wegen  $\int \vec{\omega} dF = \int \nabla \times \vec{v} dF = \oint \vec{v} ds$  ist die örtl. Wirbelstärke gleich der Zirkulation.

2) Vgl. MÜLLER [17] und ROSENHEAD [16] .



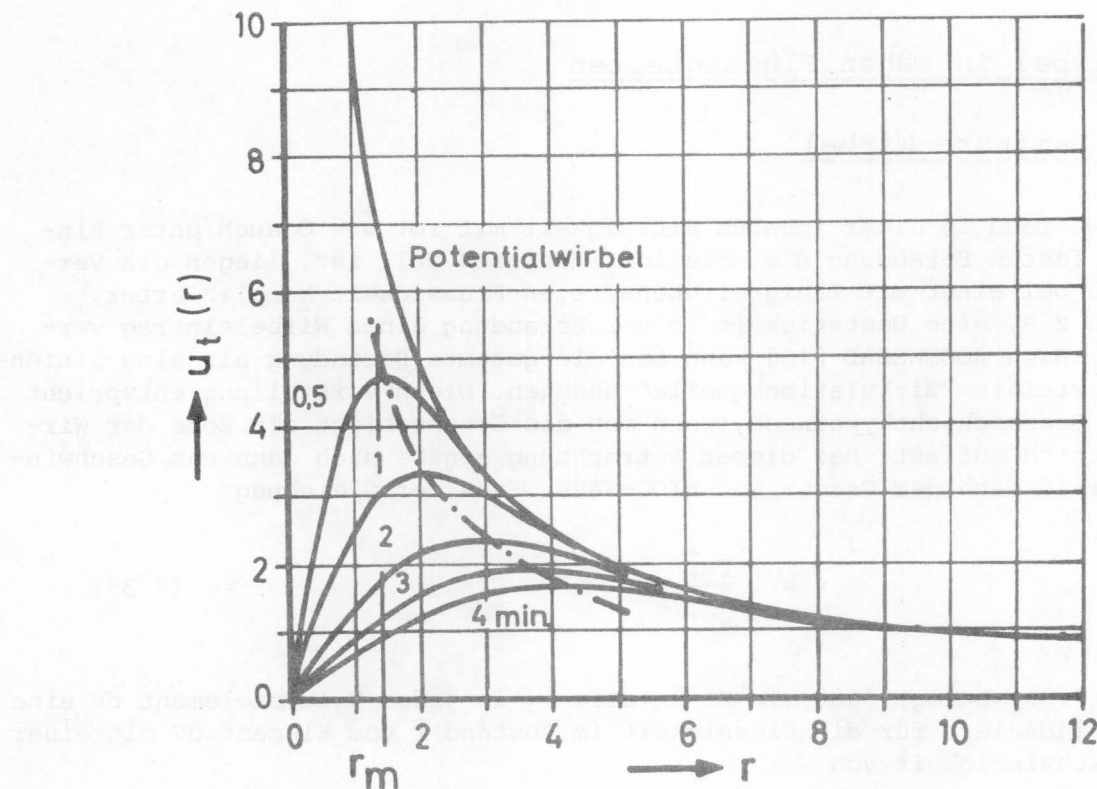


Abb. 2.9 Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung eines Wirbels in der zähen Flüssigkeit [17]

Die Abb. 2.9 zeigt folgendes:

Der Geschwindigkeitsverlauf bis zum Maximum im Punkt  $r_m$  ist etwa linear. Die Flüssigkeit im Bereich  $r < r_m$  verhält sich wie ein sich drehender Kern und entspricht damit den HELMHOLTZ'schen Bewegungsgleichungen.

Es ist klar zu erkennen, daß durch die Übertragung der Schubspannungen - als Folge der Zähigkeit - immer größere Wassermengen in Rotation versetzt werden, wodurch sich der Kern ausbreitet. Die Geschwindigkeitsmaxima nehmen nach einer Exponentialfunktion ab.

### 2.22.2 Turbulente Wirbel

Wie aus Gl. (2.36) und (2.37) zu ersehen ist, hängt die zeitliche Entwicklung eines laminaren Wirbels von der Zähigkeit ab; er zerfällt umso schneller, je größer diese ist. So beträgt die Zeit, die verstreicht, bis die Tangentialgeschwindigkeit von ihrem Anfangswert

$$u_{to} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

auf den halben Wert abgesunken ist

$$t = \frac{r^2}{4\nu \ln 2} = \frac{r^2}{2,772 \nu} \quad (2.39)$$

Bei einem turbulenten Wirbel wird eine 3/4-Wertzeit definiert, die als Zer-

fallszeit des Wirbels anzusehen ist:

$$\theta = \frac{t \cdot v}{r_m^2 \Delta x_{0,9}} \quad (2.40)$$

$t$  ist die Zeit, die vergeht, bis die maximale Umfangsgeschwindigkeit auf  $3/4$  ihres Ausgangswertes abgesunken ist.

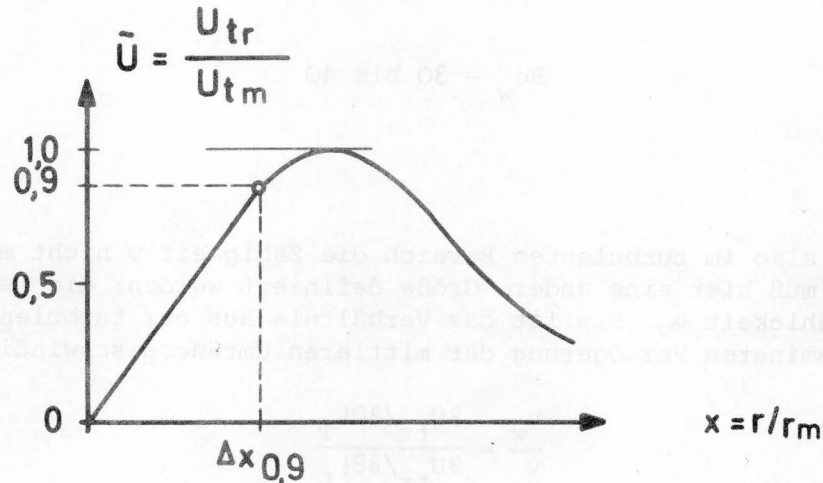


Abb. 2.10 Zur Definition der Zerfallszeit

Nach Messungen von FOCKE [18] [19] hat  $\theta$  die in Abb. 2.11 dargestellte Form :

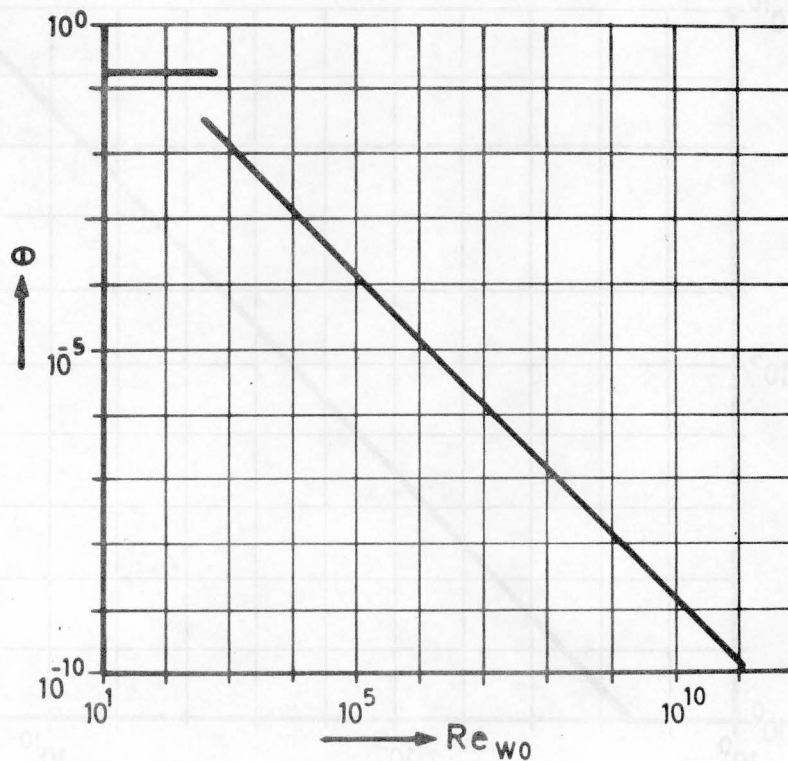


Abb. 2.11 Zerfallszeit eines Wirbels, abhängig von der REYNOLDS-Zahl

$Re_{w0}$  ist der zeitliche Anfangswert der REYNOLDS-Zahl



$$Re_w = \frac{u_{tm} \cdot r_m}{\nu}$$

Es zeigen sich dabei eindeutig zwei Bereiche. Bei kleinen  $Re_w$ -Zahlen ist der Wirbel laminar, hier besteht keine Abhängigkeit von  $Re_w$ , sondern nur von der molekularen Zähigkeit. Beim Umschlag in den turbulenten Zustand spielt dagegen  $\nu$  keine Rolle mehr. Hier ist der Zerfall des Wirbels von der Intensität des Impuls- und Energieaustausches der turbulenten Schwankungen abhängig. Der Umschlag findet nach FOCKE [18] bei etwa

$$Re_w = 30 \text{ bis } 40$$

statt.

Wenn also im turbulenten Bereich die Zähigkeit  $\nu$  nicht mehr maßgebend ist, so muß hier eine andere Größe definiert werden; die ist die mittlere Wirbelzähigkeit  $\nu_w$ . Sie ist das Verhältnis aus der turbulenten Verzögerung zur laminaren Verzögerung der mittleren Umfangsgeschwindigkeit.

$$\frac{\nu_w}{\nu} = \frac{\partial u_{tr} / \partial \theta|_T}{\partial u_{tr} / \partial \theta|_L}$$

In Abb. 2.12 ist  $\nu_w/\nu$  in Abhängigkeit von  $Re_{w0}$  wiederum nach Messungen von FOCKE [18] dargestellt.

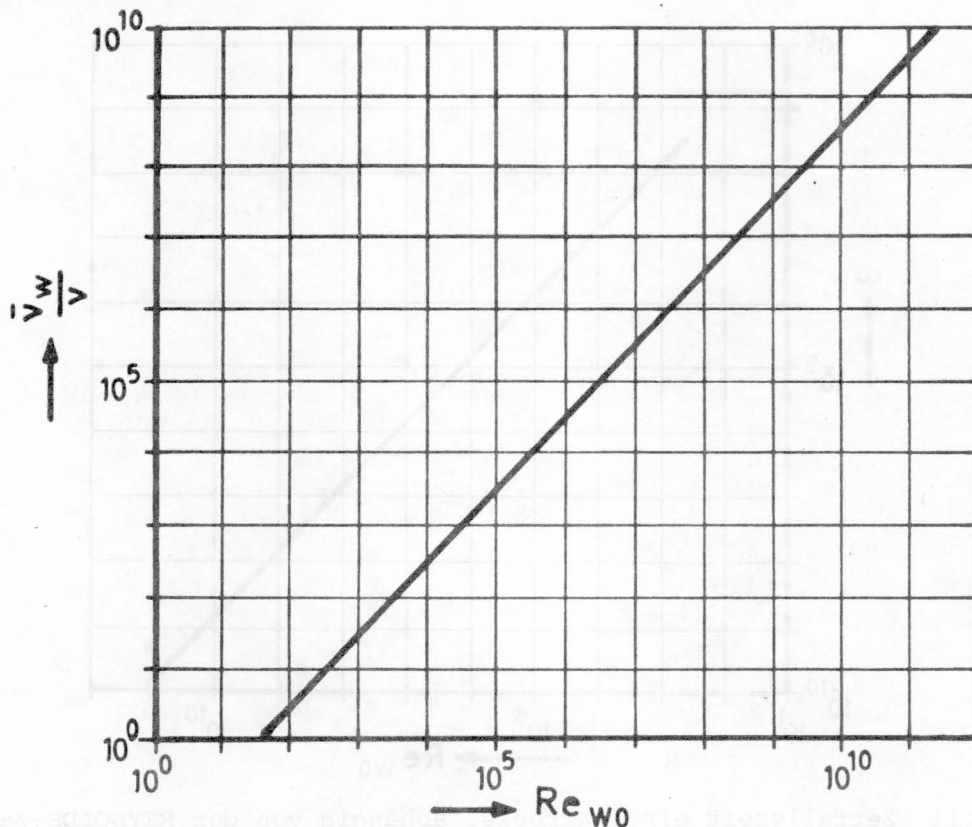


Abb. 2.12 Mittlere Wirbelzähigkeit, abhängig von der REYNOLDS-Zahl des Wirbels [18]

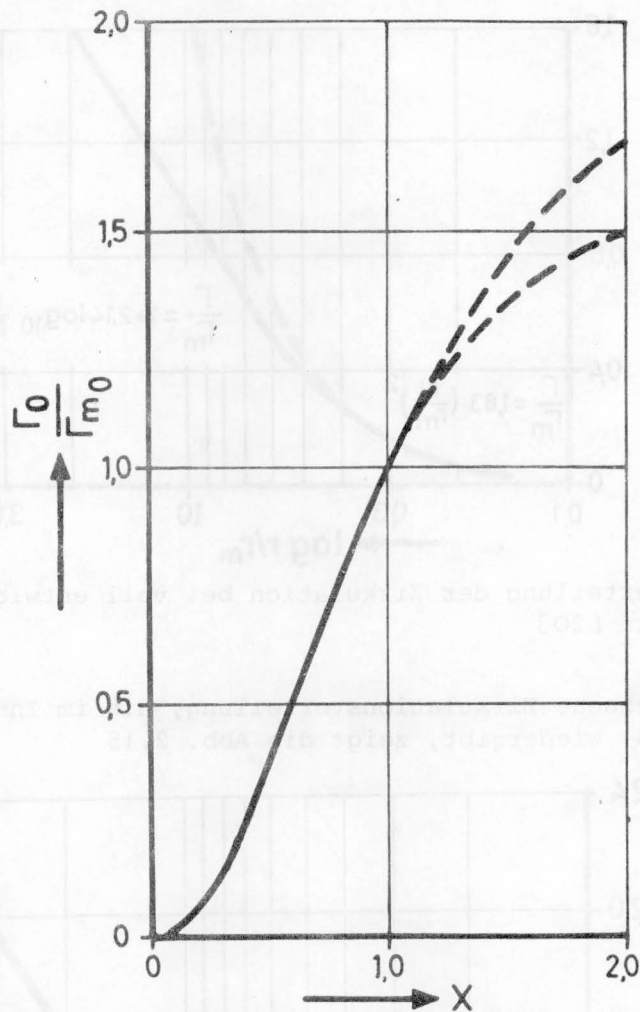


Abb. 2.13 Anfangsverteilungen der Zirkulation [18]

Die Abb. 2.13 zeigt die Verteilung der Zirkulation nach [18]. HOFFMANN und JOUBERT [20] leiten aus Turbulenzbetrachtungen eine Verteilung der Zirkulation ab, die analog zum KARMAN'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz einen logarithmischen Aufbau hat. Für den äußeren Bereich ( $r > r_m$ ), in welchem die REYNOLDS'schen Schubspannungen gegenüber der molekularen Zähigkeit überwiegen, gilt (s. Abb. 2.14):

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_m} = K \ln (r/r_m) + 1 \quad (2.41)$$

Die lokale Dissipationsrate beträgt in diesem Bereich

$$\epsilon = - \overline{u'v'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_t \cdot r) \quad (2.42)$$

Im Kernbereich ( $r < r_m$  und  $\Gamma \sim r^2$ ) gilt nach [20] die Gleichung

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_m} = 1,83 (r/r_m)^2 \quad (2.43)$$

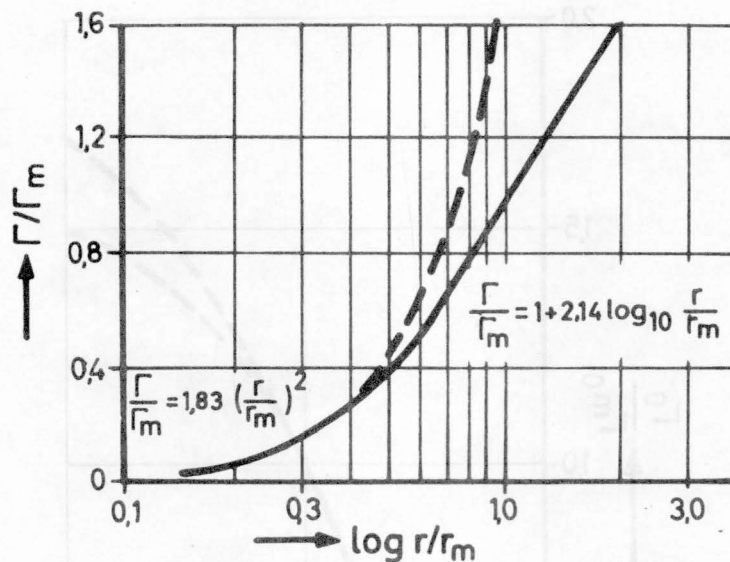


Abb. 2.14 Die Verteilung der Zirkulation bei voll entwickelten turbulenten Wirbeln [20]

Eine gemessene Zirkulationsverteilung, die im Innenbereich die Parabel der Gl. (2.43) wiedergibt, zeigt die Abb. 2.15

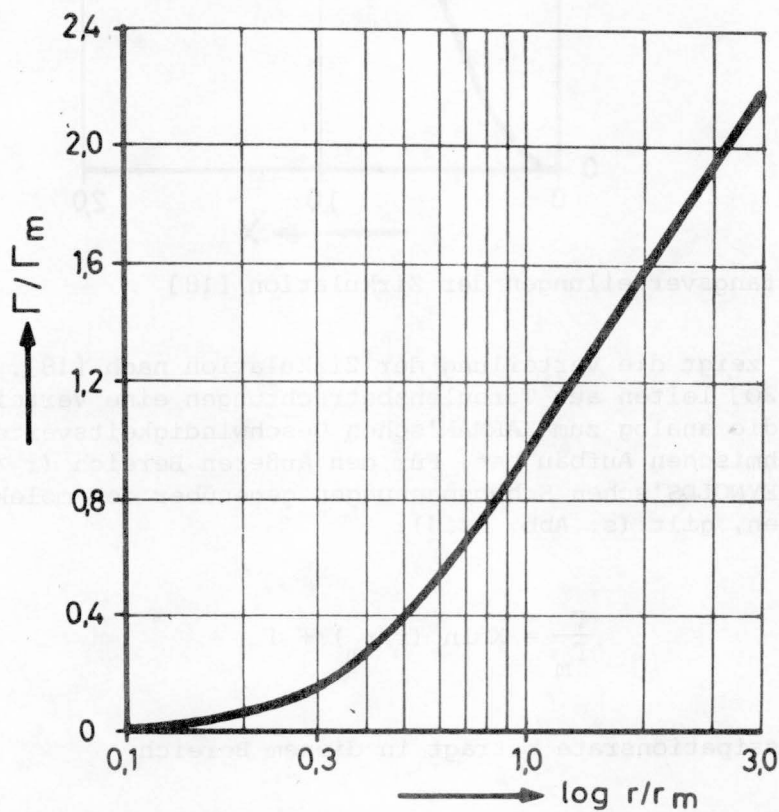


Abb. 2.15 Die Zirkulationsverteilung im Kernbereich des Wirbels [20]

Die Gleichung für den Außenbereich lautet:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_m} = 2,14 \lg (r/r_m) + 1 \quad (2.44)$$

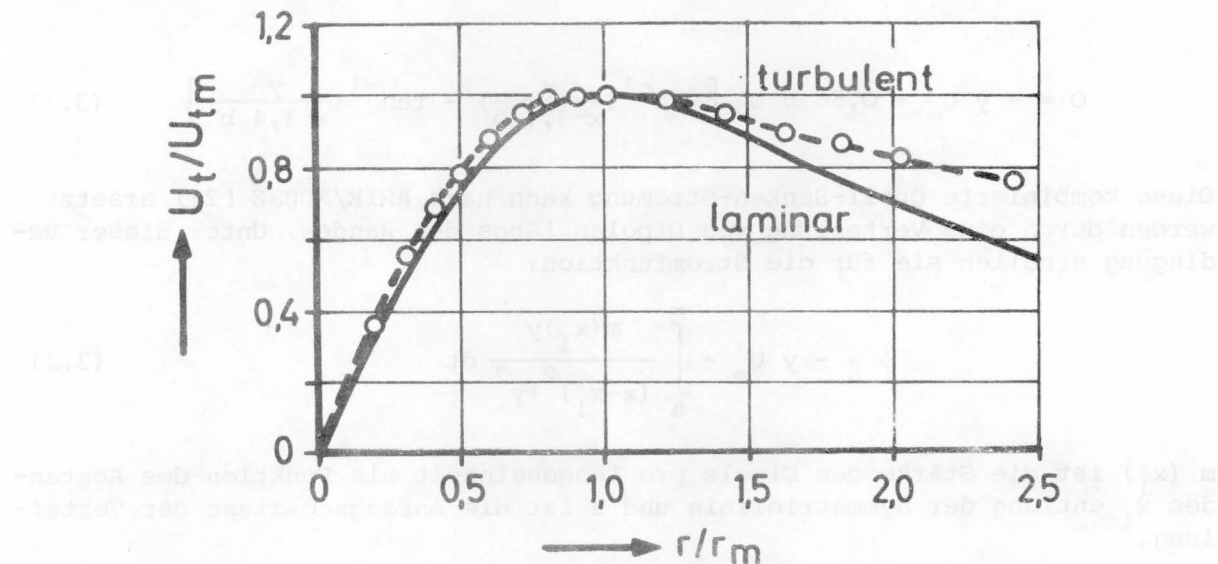


Abb. 2.16 Vergleich laminarer und turbulenter Wirbelprofile [20]

### 3. Literaturübersicht

ARIE und ROUSE [21] untersuchten die Wirbelbewegung hinter einer Platte in einem Luftkanal. Sie konstruierten die Stromlinien aus Geschwindigkeitsmessungen nach der Gleichung:

$$\phi = \int_0^y U \, dy = \text{const}$$

Für die Randstromlinie des Wirbels muß nach der Kontinuitätsbedingung dann gelten:

$$\phi = \int_0^{y_0} U \, dy = 0$$

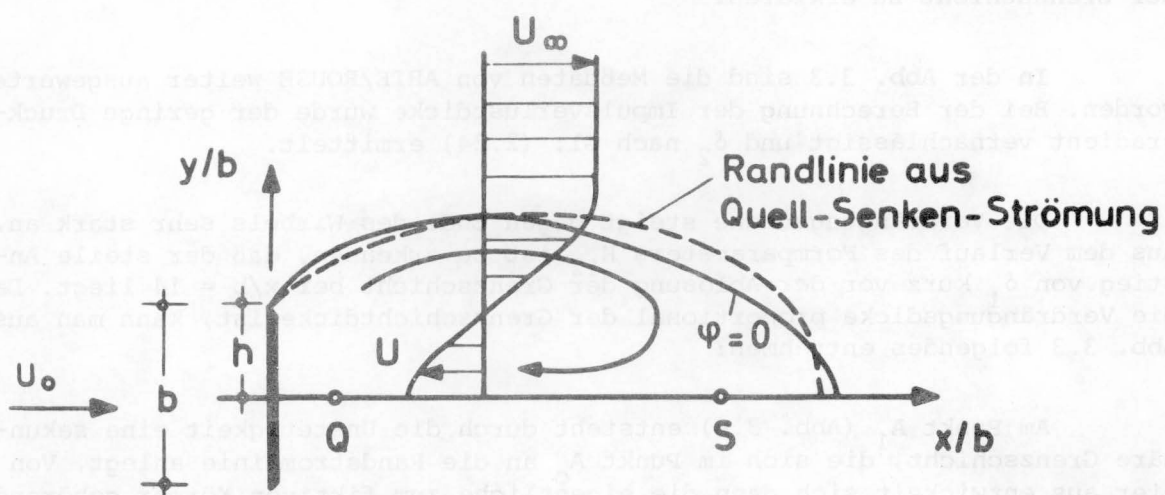


Abb. 3.1 Ausbildung der Wirbelzone

Das Strömungsbild wurde durch das fiktive System aus einer Quell-Senken-Strömung ersetzt. Die Autoren fanden damit die Gleichung für die Randstromlinie zu:

$$0 = -y U_{\infty} + 0,56 b U_{\infty} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{y}{x-3,4 b} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y}{x+3,4 b} \right) \right] \quad (3.1)$$

Diese kombinierte Quell-Senken-Strömung kann nach ARIE/ROUSE [21] ersetzt werden durch eine Verteilung von Dipolen längs des Randes. Unter dieser Bedingung erhalten sie für die Stromfunktion:

$$\phi = -y U_{\infty} - \int_a^{\infty} \frac{m(x_1)y}{(x-x_1)^2 + y^2} dt \quad (3.2)$$

$m(x_1)$  ist die Stärke des Dipols pro Längeneinheit als Funktion des Abstandes  $x_1$  entlang der Symmetrielinie und  $a$  ist die Anfangsabszisse der Verteilung.

Legt man das Modell eines umströmten Körpers zugrunde, an dessen Rand  $\phi = 0$  gelten muß, so erhält man, wenn  $m(x_1)$  durch  $m(x)$  ersetzt wird, die Verteilung der Dipolstärke nach der folgenden Gleichung:

$$m(x) = -U_{\infty} y(x) \left[ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left( \frac{x-a}{y} \right) \right]^{-1} \quad (3.3)$$

Wie bereits im Abschnitt 2.21 dargelegt, kann der Wirbel als fester, drehungsfrei umströmter Körper angesehen werden. Die sich bildende Grenzschicht löst sich schließlich ab und bildet eine Wirbelschleppe. Zur Beschreibung dieser Wirbelschleppe kann nach [21] ebenfalls Gl. (3.3) herangezogen werden.

In den Abb. 3.2 a) und b) sind die Meßergebnisse von ARIE und ROUSE dargestellt. Aus der Abb. 3.2 b) ist zu erkennen, daß das Maximum der turbulenten Schwankungen nur bis etwa zur halben Länge des Wirbels mit der Stromlinie  $\phi = 0$  übereinstimmt. Diese Tatsache ist nur aus der Ausbildung der Grenzschicht zu erklären.

In der Abb. 3.3 sind die Meßdaten von ARIE/ROUSE weiter ausgewertet worden. Bei der Berechnung der Impulsverlustdicke wurde der geringe Druckgradient vernachlässigt und  $\delta_2$  nach Gl. (2.24) ermittelt.

Die Verdrängungsdicke steigt gegen Ende des Wirbels sehr stark an. Aus dem Verlauf des Formparameters  $H_{12}$  ist zu erkennen, daß der steile Anstieg von  $\delta_1$  kurz vor der Ablösung der Grenzschicht bei  $x/b = 14$  liegt. Da die Verdrängungsdicke proportional der Grenzschichtdicke ist, kann man aus Abb. 3.3 folgendes entnehmen:

Am Punkt  $A_1$  (Abb. 3.4) entsteht durch die Unstetigkeit eine sekundäre Grenzschicht, die sich im Punkt  $A_0$  an die Randstromlinie anlegt. Von hier aus entwickelt sich dann die eigentliche zum fiktiven Körper gehörende Grenzschicht. Im Punkt  $A_2$  löst sich diese vom Körper ab und bildet einen Nachlauf.



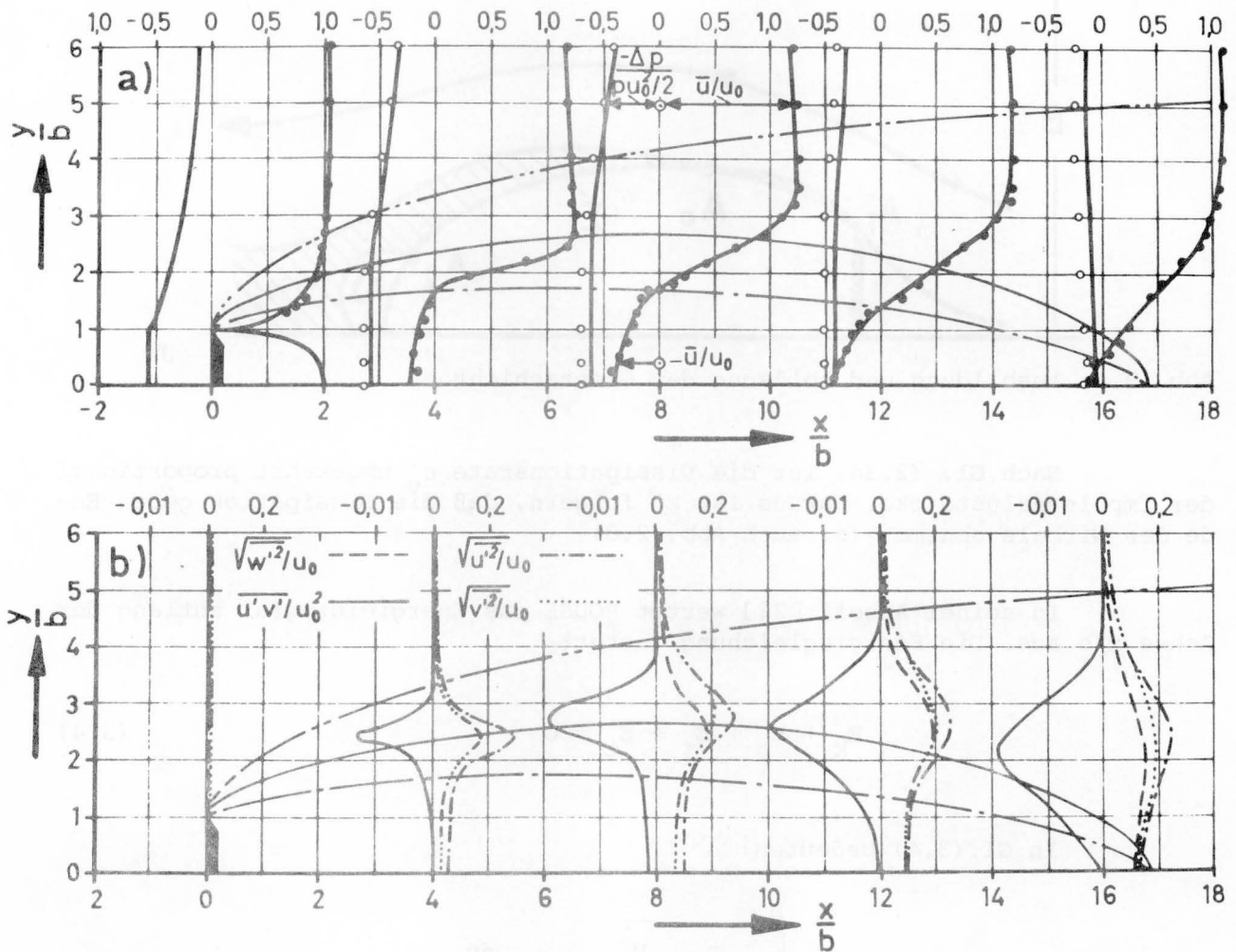


Abb. 3.2 Die Ablösungszone nach ARIE/ROUSE [21]

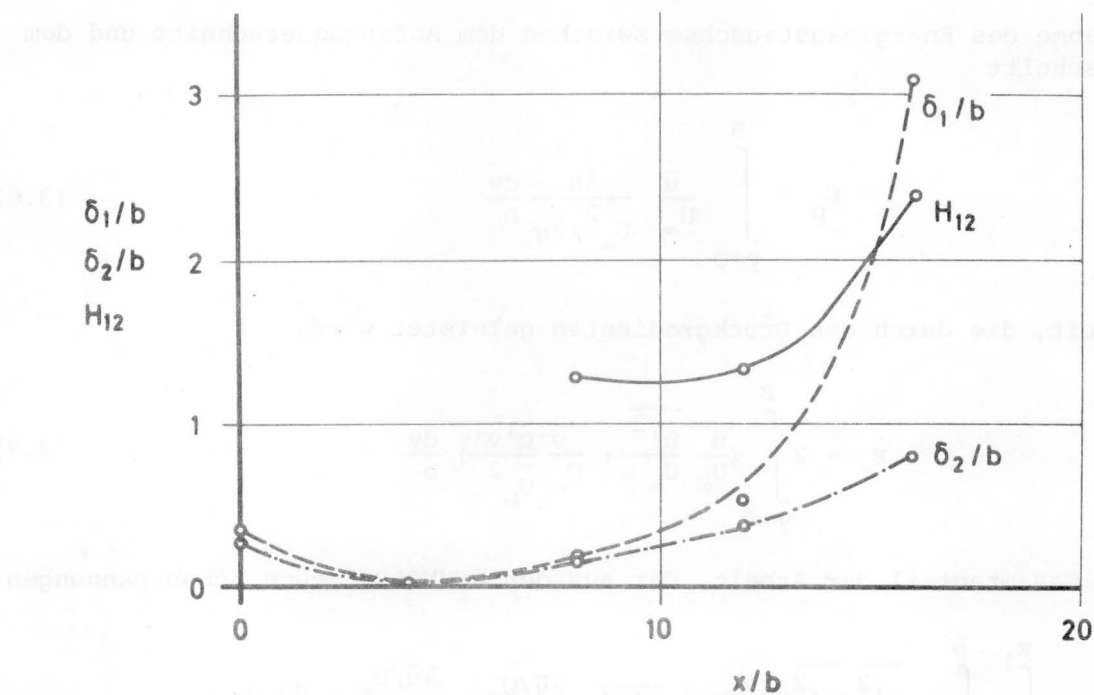


Abb. 3.3 Verdrängungsdicke, Impulsverlustdicke und Formparameter entlang der Rückströmungszone

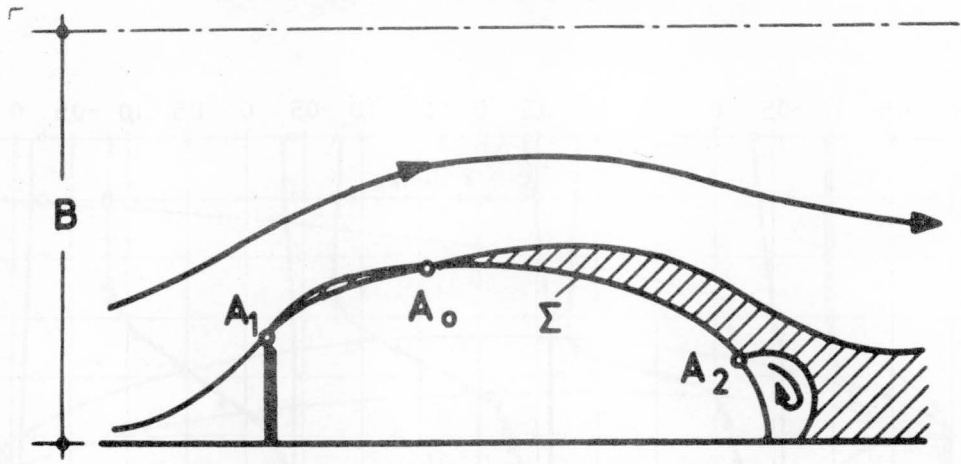


Abb. 3.4 Ausbildung und Ablösung der Grenzschicht

Nach Gl. (2.34) ist die Dissipationsrate  $\epsilon_v$  umgekehrt proportional der Impulsverlustdicke. Daraus ist zu folgern, daß die Dissipation gegen Ende des Wirbels abnimmt (s. auch Abb. 2.8).

In seiner Arbeit [22] wertet ROUSE das Energieintegral entlang der Achse  $x/b$  aus. Die Energiegleichung lautet:

$$E_k + E_p + E_\tau + E_t = 0 \quad (3.4)$$

In Gl. (3.4) bedeuten:

$$E_k = \int_{y=0}^B \left( \frac{\bar{u}}{U_\infty} \cdot \frac{\overline{v^2}}{U_\infty^2} - 1 \right) \cdot \frac{dy}{b} \quad (3.5)$$

die Zunahme des Energieaustausches zwischen dem Anfangsquerschnitt und dem Endquerschnitt

$$E_p = \int_{y=0}^B \frac{\bar{u}}{U_\infty} \frac{\Delta h}{U_\infty^2/2g} \frac{dy}{b} \quad (3.6)$$

die Arbeit, die durch den Druckgradienten geleistet wird.

$$E_\tau = 2 \int_{y=0}^B \left( \frac{\bar{u}}{U_\infty} \frac{\overline{u'^2}}{U_\infty^2} + \frac{\bar{v}}{U_\infty} \frac{\overline{u'v'}}{U_\infty^2} \right) \frac{dy}{b} \quad (3.7)$$

ist der Gesamtanteil der Arbeit, der aus den REYNOLDS'schen Schubspannungen kommt.

$$E_t = 2 \int_{x=0}^{x_1} \int_{y=0}^B \left( \frac{\overline{u'^2} - \bar{v}^2}{U_\infty^2} \frac{\partial \bar{u}/U_\infty}{\partial x/b} + \frac{\overline{u'v'}}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \bar{v}/U_\infty}{\partial x/b} + \frac{\partial \bar{u}/U_\infty}{\partial y/b} \right) \right) \frac{dy}{b} \frac{dx}{b} \quad (3.8)$$



ist der Anteil, der durch die Schubspannungen in turbulente Schwankungen umgesetzt wird. Die Integration erstreckt sich in Richtung der  $y$ -Achse bis zum Abstand  $B$  senkrecht zum Rand  $R$ , wo ungestörte Strömung vorliegt, d.h.  $u = U_\infty$ . In  $x$ -Richtung reichen die Integrationsgrenzen in den ungestörten Strömungsbereich. In den Gl. (3.5) bis (3.8) sind  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  die Mittelwerte der örtlichen Geschwindigkeiten und  $\bar{v}^2 = \bar{u}'^2 + \bar{v}'^2$ .

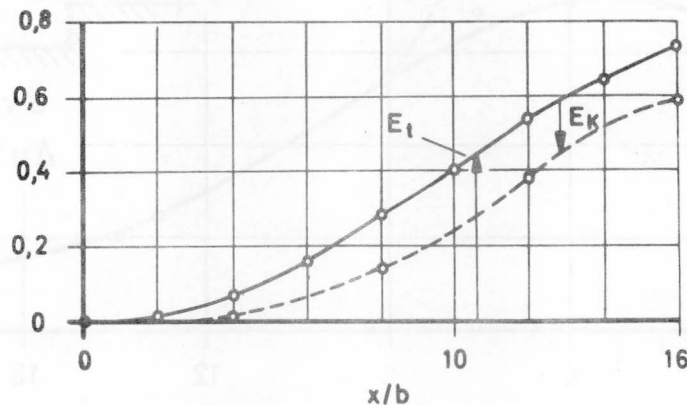


Abb. 3.5 Die Dissipationsfunktion nach ROUSE [22]

In der Abb. 3.5 ist die Dissipationsfunktion nach ROUSE [22] dargestellt als Differenz zwischen der Turbulenzproduktion  $E_t$  und der Konvektion  $E_k$ . Wenn man beachtet, daß in Abb. 3.5 eine Summenkurve dargestellt ist und die Änderungsrate durch den Anstieg der Kurve gegeben ist, so wird man feststellen, daß in Übereinstimmung mit Abb. 3.3 die größte Dissipation etwa im mittleren Bereich der Randstromlinie  $\Sigma'$  liegt.

CHATURVEDI [23] untersuchte die Strömungsverhältnisse bei der plötzlichen Erweiterung eines Kanales bei verschiedenen Öffnungswinkeln  $\alpha$  (Abb. 3.6).

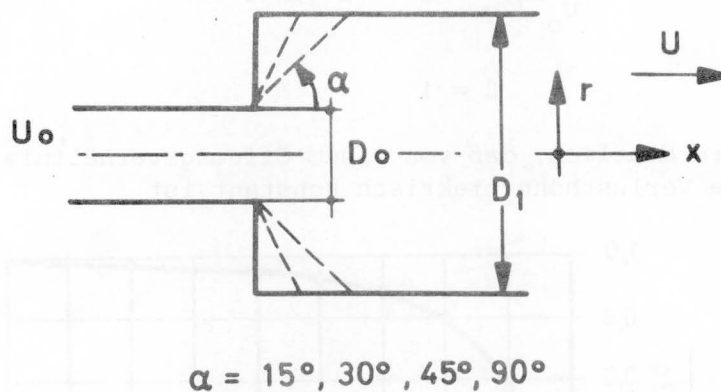
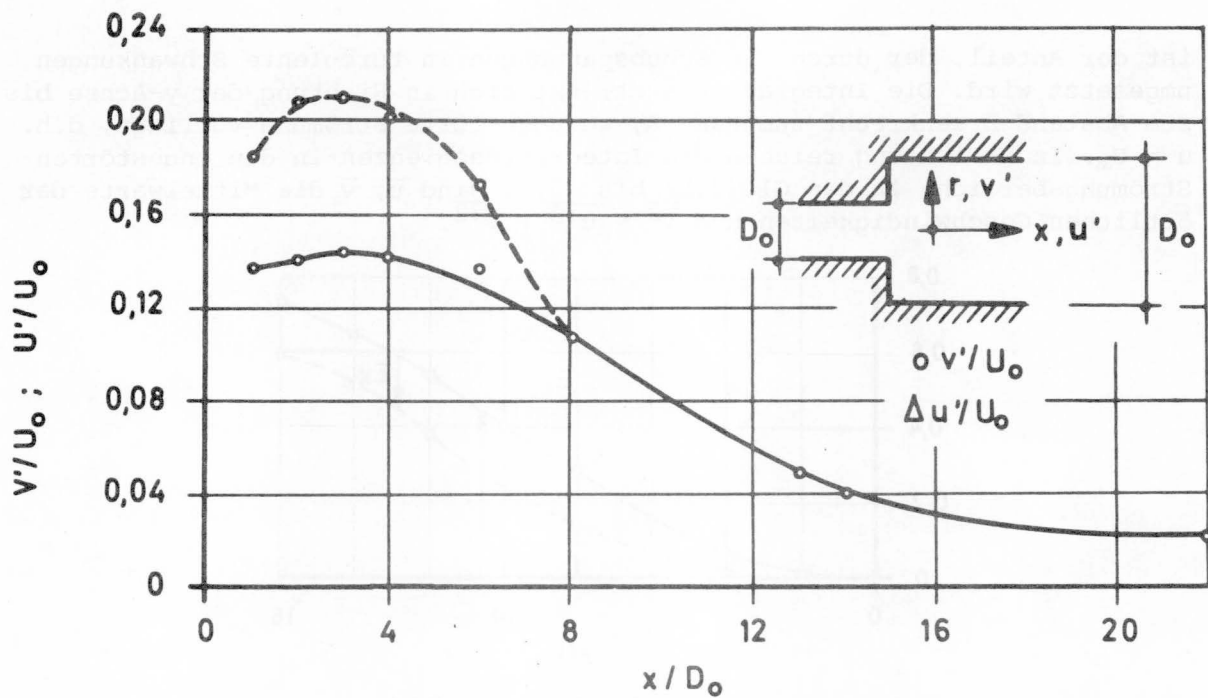


Abb. 3.6 Erweiterung im Kanal

Bei diesen Versuchen wurden vor allem die turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten gemessen. Die Abb. 3.7 zeigt den Verlauf der maximalen Turbulenzintensität in der Fließrichtung ( $u'/U_0$ ) und quer zur Fließrichtung ( $v'/U_0$ ), wie sie sich aus den Meßergebnissen [23] ergeben. Es zeigt sich, daß unmittelbar hinter der Erweiterung ( $x/D_0 \approx 3$ ) die Zone der Turbulenzproduktion liegt, gekennzeichnet durch starke Anisotropie.

Abb. 3.7 Verlauf der maximalen Turbulenzintensität;  $\alpha = 90^\circ$ 

Von  $x/D_0 \approx 8$  ist die Strömung weitgehend isotrop und die Vorgänge liegen daher im Bereich großer Wellenzahlen. Das bedeutet aber, daß hier die Dissipation ihr Maximum erreicht.

Die Energieverlusthöhe  $\Delta H$ , als äußeres Resultat, ist in Abb. 3.8 bzw. Abb. 3.9 für verschiedene Öffnungsverhältnisse  $D_1/D_0$  und verschiedene Öffnungswinkel  $\alpha$  dargestellt. CHARTURVEDI gibt dazu folgende Gleichung an:

$$-\frac{\Delta H}{U_0^2/2g} = [\beta (D_0/D_1)^2]^2 \quad (3.9)$$

$$\beta = 1$$

Es wird deutlich, daß von einem Öffnungsverhältnis  $D_1/D_0 \approx 0,7$  bzw.  $\alpha \approx 30^\circ$  die Verlusthöhe praktisch konstant ist.

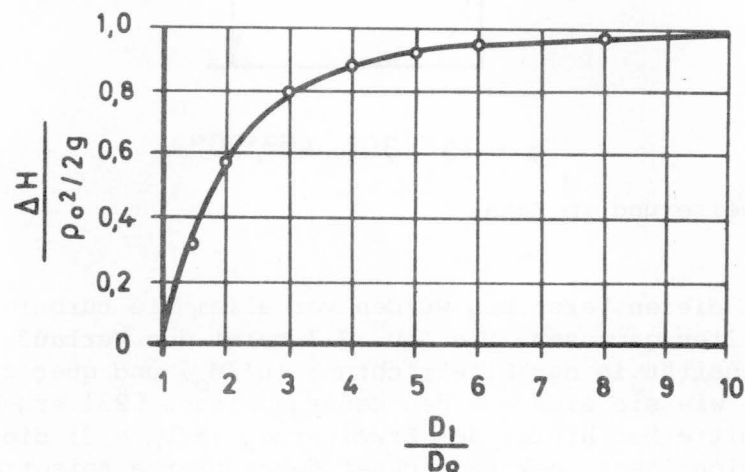


Abb. 3.8 Verlusthöhe in Abhängigkeit vom Öffnungsverhältnis [23]

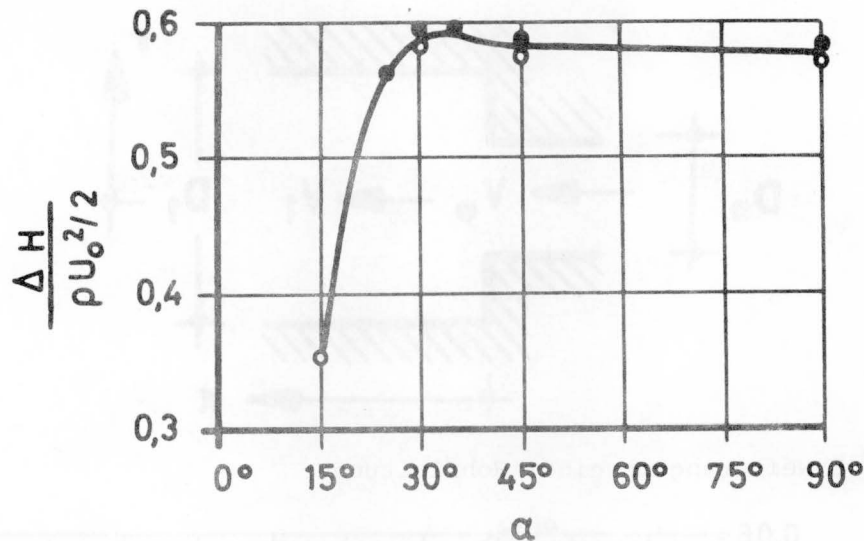


Abb. 3.9 Verlusthöhe, abhängig vom Öffnungswinkel [23]

Der Wert, der sich nach BORDA errechnet, gilt offensichtlich nur für die Winkel  $\alpha > 30^\circ$  und gibt etwas zu kleine Werte.

CHEVRAY [24] führte ähnliche Untersuchungen durch wie CHARTURVEDI mit Öffnungswinkeln von  $15^\circ$  und  $90^\circ$ . In der Abb. 3.10 ist der Verlauf der maximalen turbulenten Scherspannungen  $\overline{u'v'}/U_\infty^2$  nach Messungen von CARMODY (zitiert in [24]) dargestellt und zum Vergleich die Kurve, die sich theoretisch nach CHEVRAY ergeben müßte.

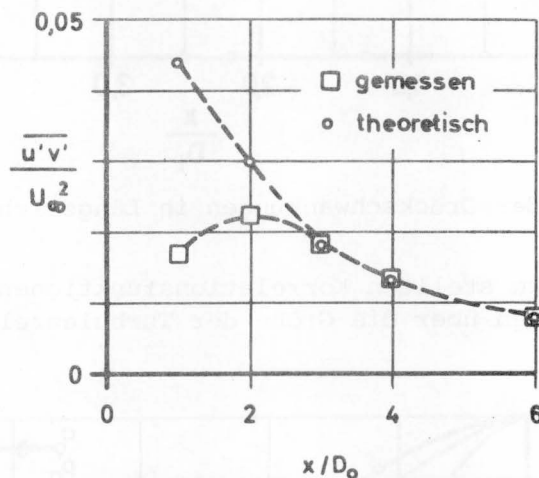


Abb. 3.10 Verlauf der maximalen Scherspannungen

ROUSE und JEZDINSKY [25] untersuchten insbesondere die Wanddruckverhältnisse bei plötzlichen Erweiterungen in Rohrleitungen. Die Abb. 3.12 zeigt die Intensität der Druckschwankungen, bezogen auf die Geschwindigkeitshöhe.

Man erkennt, daß das Maximum der Schwankungen mit zunehmendem Öffnungsverhältnis gegen Null geht. Ferner existiert offensichtlich ein Wert

$$\sqrt{p'^2}_{\max} \text{ bei } D_1/D_0 \approx 1,5.$$

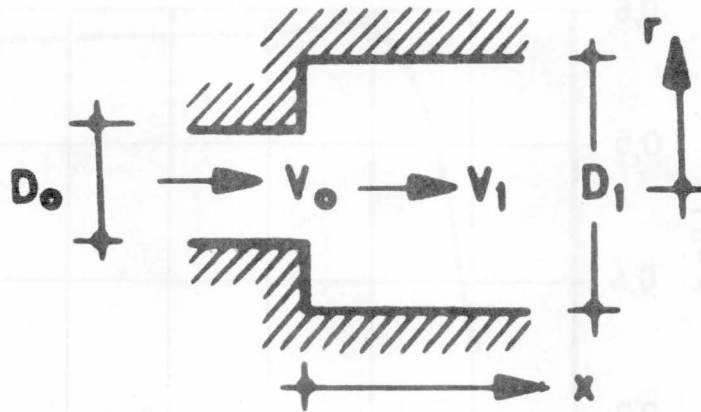


Abb. 3.11 Erweiterung in einer Rohrleitung

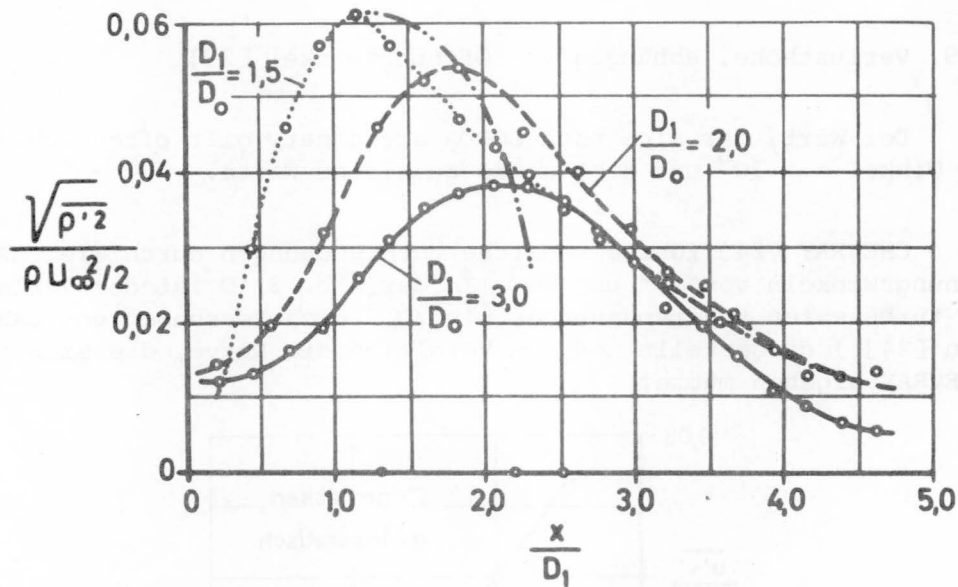


Abb. 3.12 Änderung der Druckschwankungen in Längsrichtung [25]

Die Autoren stellten Korrelationsfunktionen auf, um aus diesen Aufschlüssen zu bekommen über die Größe der Turbulenzelemente. (s. Abb. 3.13, 3.14).

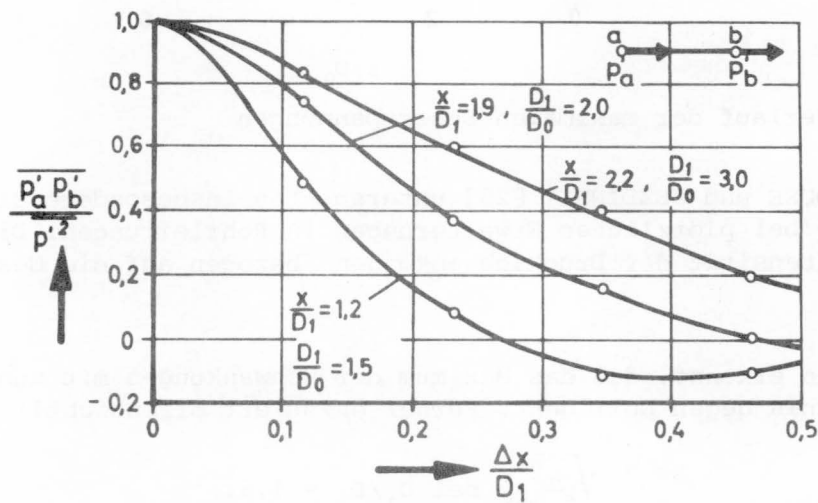


Abb. 3.13 Korrelationsfunktion im Querschnitt der größten Fluktuation [25]

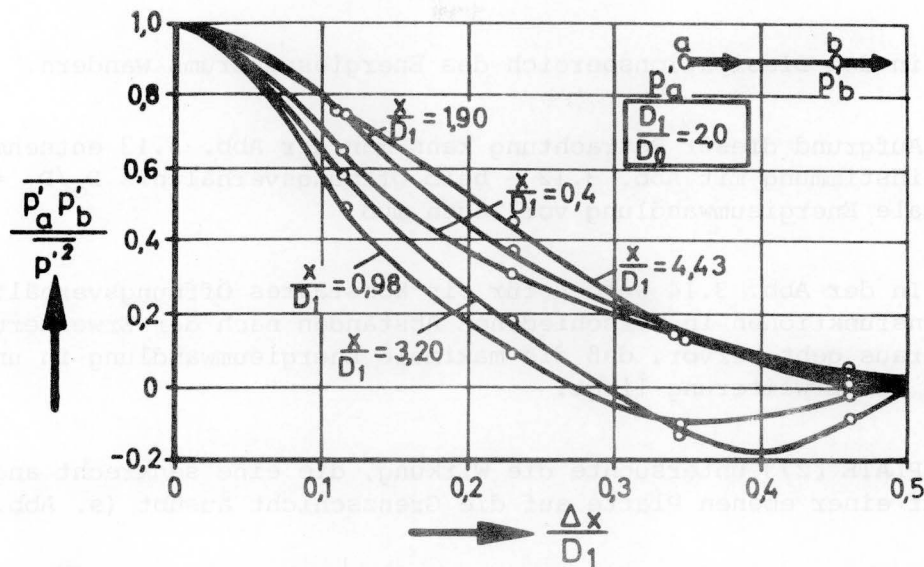


Abb. 3.14 Korrelationsfunktion in verschiedenen Querschnitten bei einer Öffnung von 1:2 [25]

Diese Korrelationsfunktionen geben mit dem Korrelationskoeffizienten  $g(x)$  einen wichtigen Aufschluß über die Dissipation in der turbulenten Strömung.

Der Korrelationskoeffizient kann mit ausreichender Genauigkeit nach der Gleichung

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{\lambda^2} \quad (3.10)$$

definiert werden mit  $\lambda$  als Mikro- oder Dissipationsmaßstab. Nach HINZE [26] wird durch  $\lambda$  ein Maß für die Ausdehnung eines vergleichbaren Wirbels festgelegt, der bei derselben Intensität die gleiche Dissipation bewirkt, wie die betrachtete Turbulenz. Die Gl. (3.10) stellt die Schmiegeparabel dar, die ihren Scheitel im Punkt  $x = 0$ ,  $g(x) = 1$  hat. Der Mikromaßstab ergibt sich dann aus  $g(x) = 0 \rightarrow x = \lambda$ .

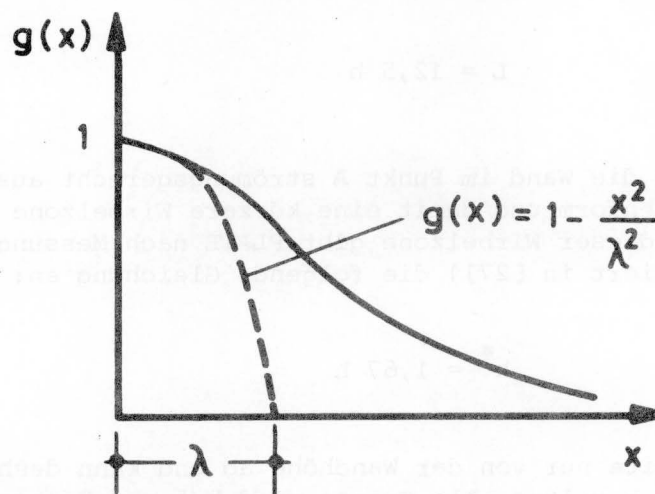


Abb. 3.15 Zur Definition des Mikromaßstabes

Je kleiner der Maßstab  $\lambda$  ist, umso größer wird die Wellenzahl,

womit wir in den Dissipationsbereich des Energiespektrums wandern.

Aufgrund dieser Betrachtung kann man der Abb. 3.13 entnehmen, daß - in Übereinstimmung mit Abb. 3.12 - beim Öffnungsverhältnis  $D_0/D_1 = 1,5$  eine optimale Energieumwandlung vorliegen muß.

In der Abb. 3.14 wurden für ein konstantes Öffnungsverhältnis Korrelationsfunktionen in verschiedenen Abständen nach der Erweiterung gemessen. Daraus geht hervor, daß die maximale Energieumwandlung in unmittelbarer Nähe der Erweiterung liegt.

PLATE [27] untersuchte die Wirkung, die eine senkrecht angeströmte Wand auf einer ebenen Platte auf die Grenzschicht ausübt (s. Abb. 3.16).

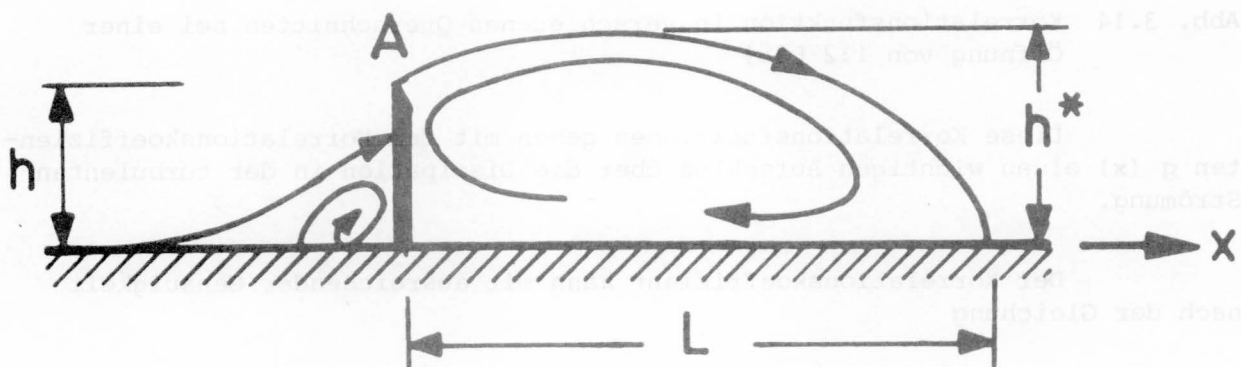


Abb. 3.16 Senkrecht angeströmte Wand auf einer ebenen Platte.

Druckmessungen an der Vorderseite der Wand zeigen im Punkt A einen starken Druckabfall, welcher zu der von HELMHOLTZ [2] beschriebenen Diskontinuität führt.

Die Länge  $L$  der Wirbelzone ergab sich nach Messungen für verschiedene Wandhöhen und Anströmungsgeschwindigkeiten zu

$$L = 12,5 h \quad (3.11)$$

Bildet man die Wand im Punkt A strömungsgerecht aus, so wird eine bessere Stromlinienform und damit eine kürzere Wirbelzone erreicht. Für die maximale Breite dieser Wirbelzone gibt PLATE nach Messungen von NAGABHUSHANAI AH (zitiert in [27]) die folgende Gleichung an:

$$h^* = 1,67 h \quad (3.12)$$

Danach hängt die Breite nur von der Wandhöhe ab und kann deshalb auch nur für kleine Werte von  $h$  gelten. Als Grenze wird  $h/\delta = 0,8$  angegeben mit  $\delta$  als Grenzschichtdicke vor der Wand.

Messungen der Turbulenzintensität zeigen, daß die durch die Wand



erzeugte Turbulenz mit zunehmendem  $x$  sich allmählich über die ganze Grenzschicht ausbreitet und dabei die maximale Intensität abgebaut wird. Diese Beobachtung stimmt überein mit den Ergebnissen von CHATURVEDI [23] und CHEVRAY [24].

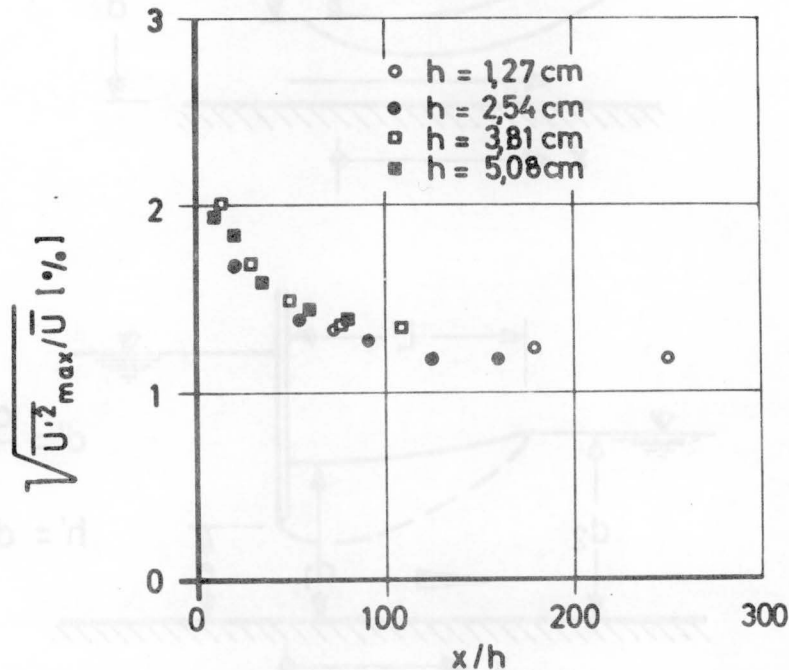


Abb. 3.17 Die Abnahme des Turbulenzgrades hinter der Wand nach Messungen von PLATE [27]

In der Abb. 3.17 sind die Meßergebnisse von PLATE in dimensionsloser Form aufgetragen worden. Es zeigt sich, daß das Maß der Abnahme unabhängig von der Wandhöhe ist.

KAPUR und REYNOLDS [28] untersuchten den Ablösungswirbel, der sich in einem teilweise geschlossenen Kanal mit quadratischem Querschnitt bildet, wobei die Wirkung der Belüftung beobachtet wurde (Abb. 3.18 a)).

Im Vergleich dazu betrachteten die Autoren den Wirbel, der sich hinter einem Schütz bei freier Wasseroberfläche einstellt (Abb. 3.18 b)).

Die Messungen des Wanddruckes im geschlossenen, unbelüfteten Kanal, dargestellt in Abb. 3.19, zeigen eindeutig zwei Bereiche, die zur Definition der Wirbellänge benutzt werden können. Der Wert  $p_1$  ist der statische Druck, gemessen im Abstand  $h$  von der Wand.

Die Abb. 3.20 zeigt den Zusammenhang zwischen der Wandhöhe  $h$  und der Wirbellänge  $L$  im geschlossenen Kanal.

Aus Abb. 3.21 wird der Einfluß der Belüftung deutlich. Die Größe  $\sigma$  ist das Verhältnis

$$\sigma = \frac{\text{Luftvolumen}}{\text{Wasservolumen}}$$



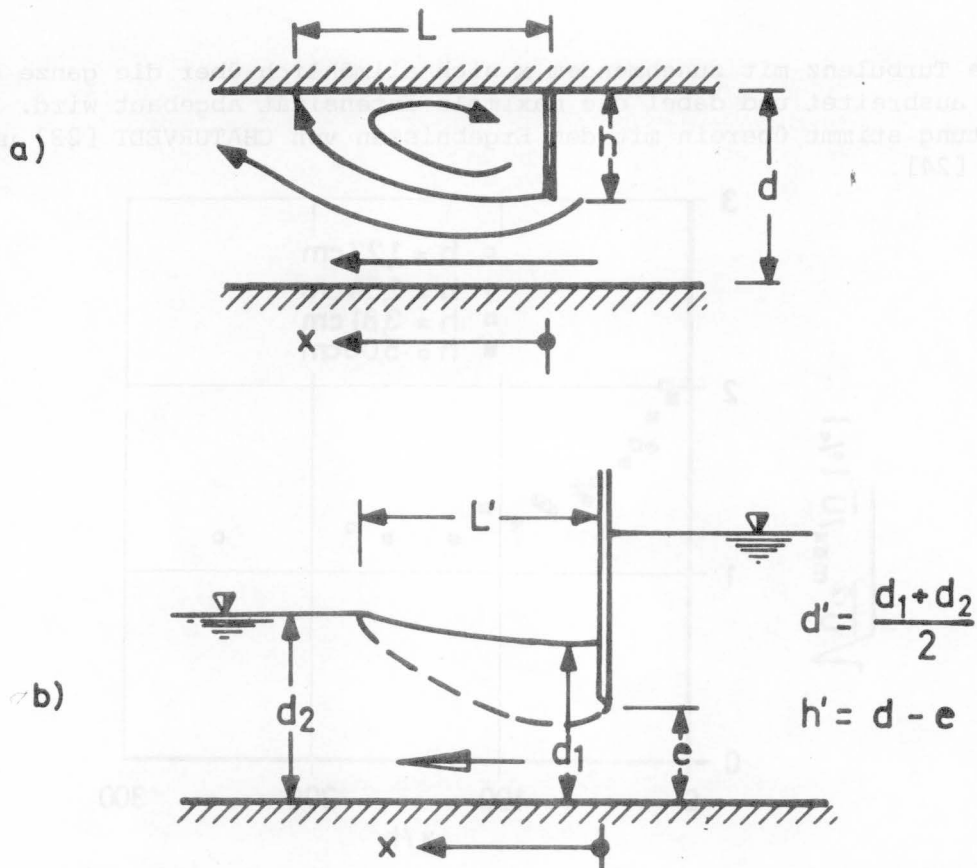


Abb. 3.18 Strömung mit nicht-freier (a) und freier (b) Oberfläche

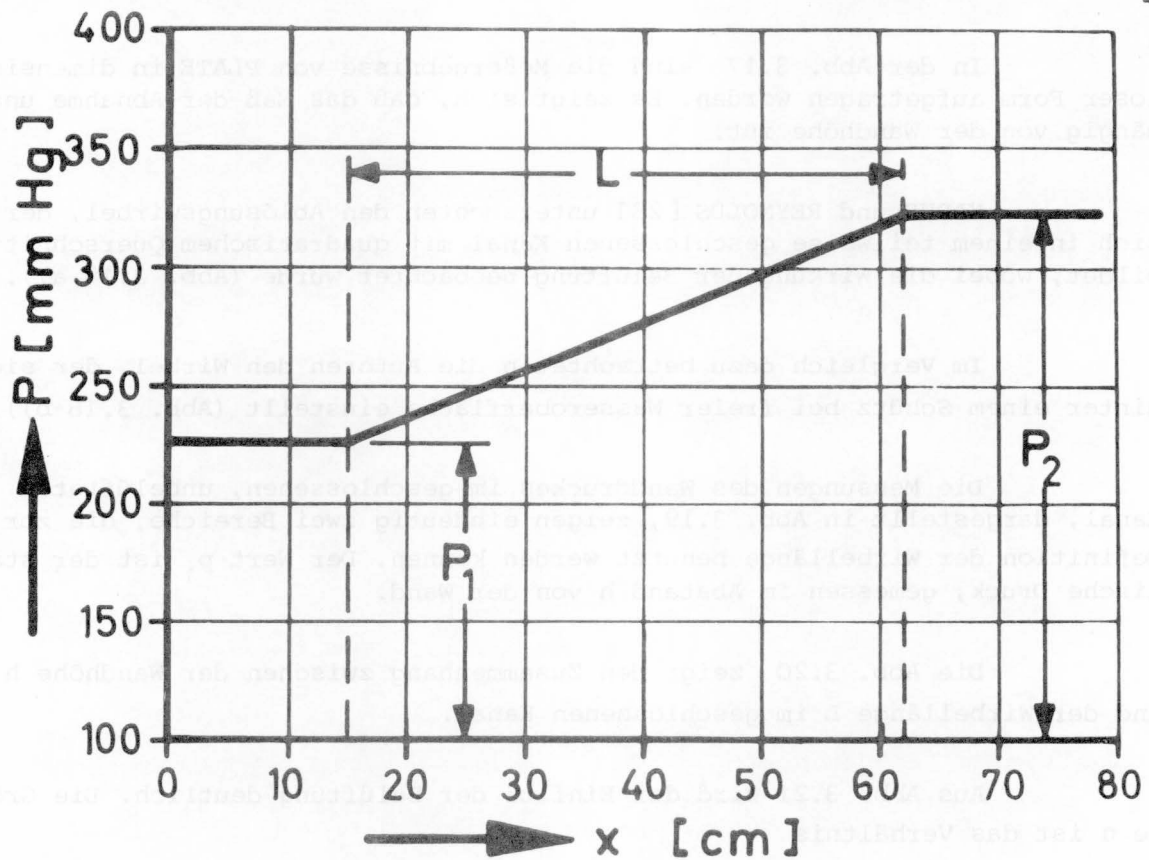


Abb. 3.19 Definition der Wirbellänge durch den Wanddruck

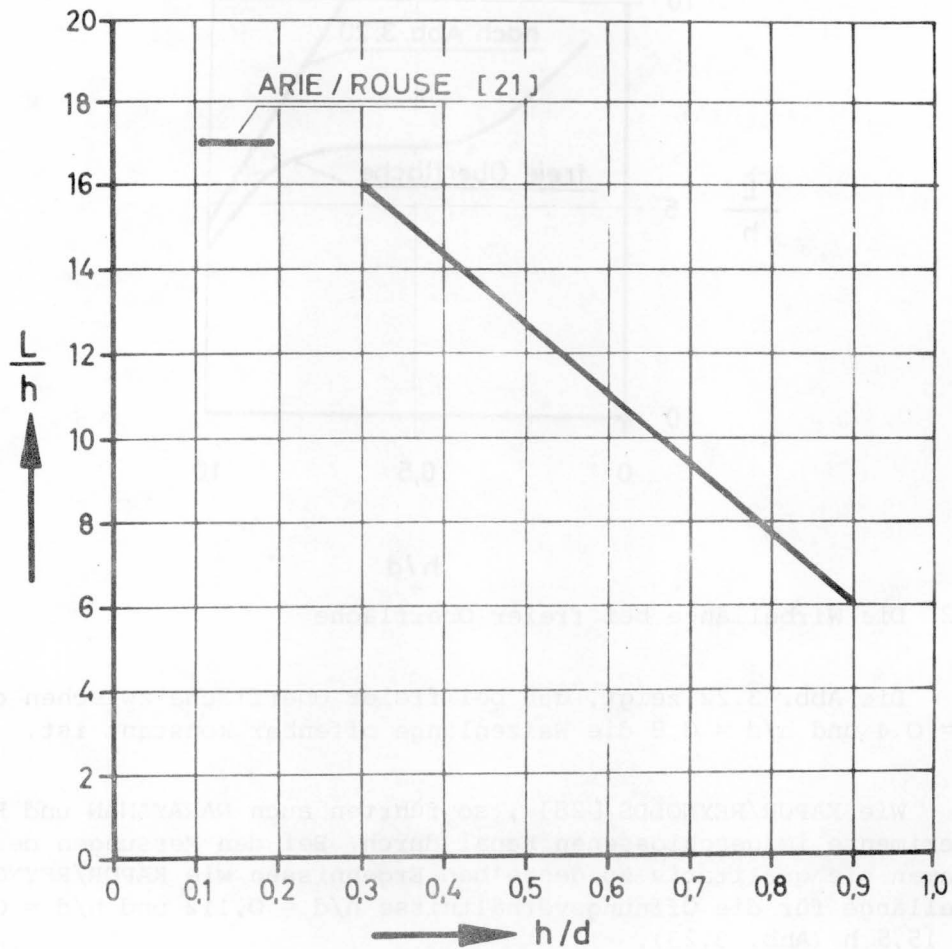


Abb. 3.20 Die Wirbellänge in Abhängigkeit von der Wandhöhe bei nicht-freier Oberfläche

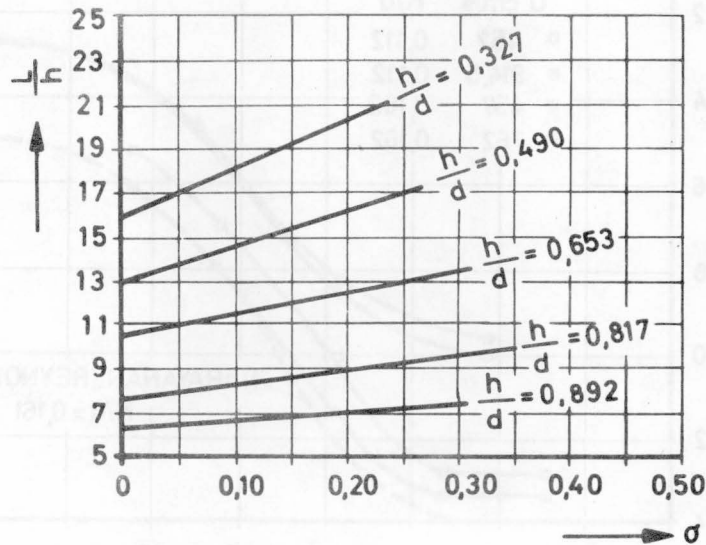


Abb. 3.21 Der Einfluß der Belüftung [28]

Der Einfluß der Belüftung nimmt mit zunehmender Einschnürung ab.

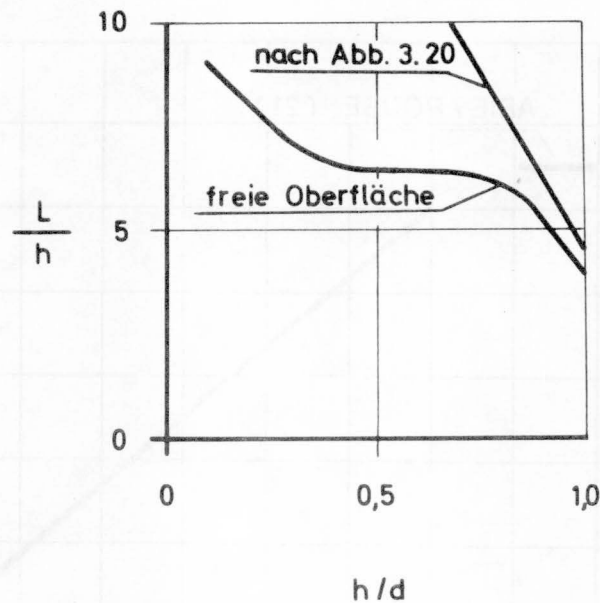


Abb. 3.22 Die Wirbellänge bei freier Oberfläche

Die Abb. 3.22 zeigt, daß bei freier Oberfläche zwischen den Werten  $h/d \approx 0,4$  und  $h/d \approx 0,8$  die Walzenlänge offenbar konstant ist.

Wie KAPUR/REYNOLDS [28], so führten auch NARAYANAN und REYNOLDS [29] Experimente im geschlossenen Kanal durch. Bei den Messungen der Wanddrücke kamen sie qualitativ zu denselben Ergebnissen wie KAPUR/REYNOLDS [28]. Die Wirbellänge für die Öffnungsverhältnisse  $h/d = 0,112$  und  $h/d = 0,162$  betrug  $L = 15,5 h$  (Abb. 3.23).

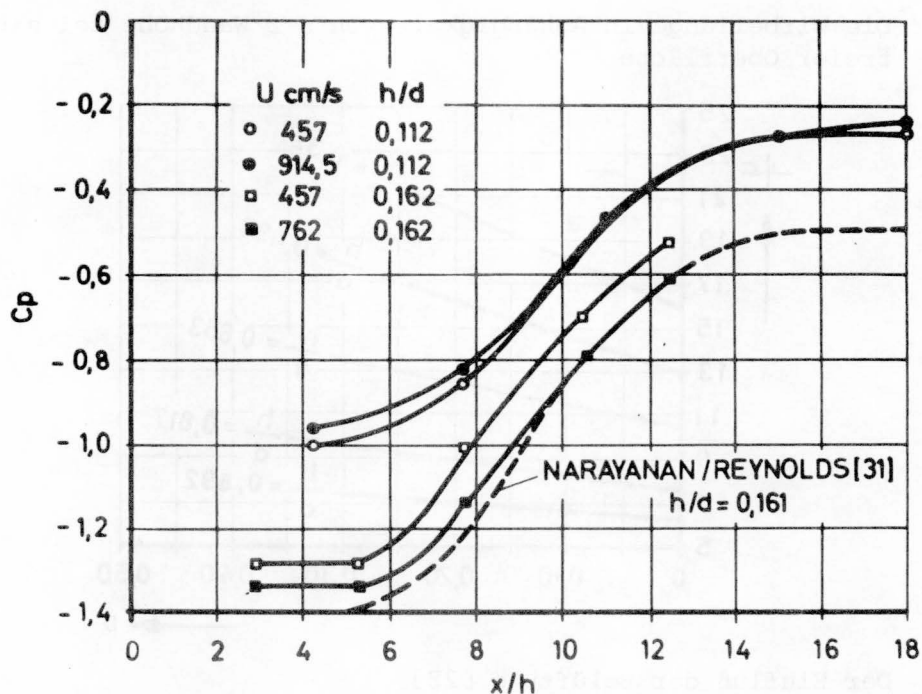


Abb. 3.23 Wanddruck entlang des Wirbels [29]

$$C_p = \frac{P - P_o}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

Da in diesem Fall nicht der absolute Druck gemessen, sondern der Druck auf die Geschwindigkeitshöhe bezogen wurde, zeigt sich deutlich die Ausbildung des Unterdruckgebietes innerhalb der Rückströmung.

Die Messungen der Druckschwankungen

$$c'_p = \frac{\sqrt{p'^2}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (3.13)$$

ergab, daß ihr Maximum bei gleicher Re-Zahl für Verhältnisse  $h/d < 0,2$  bei  $x/h = 11,5$  liegt, also bei  $3/4$  der gesamten Wirbellänge (Abb. 3.24).

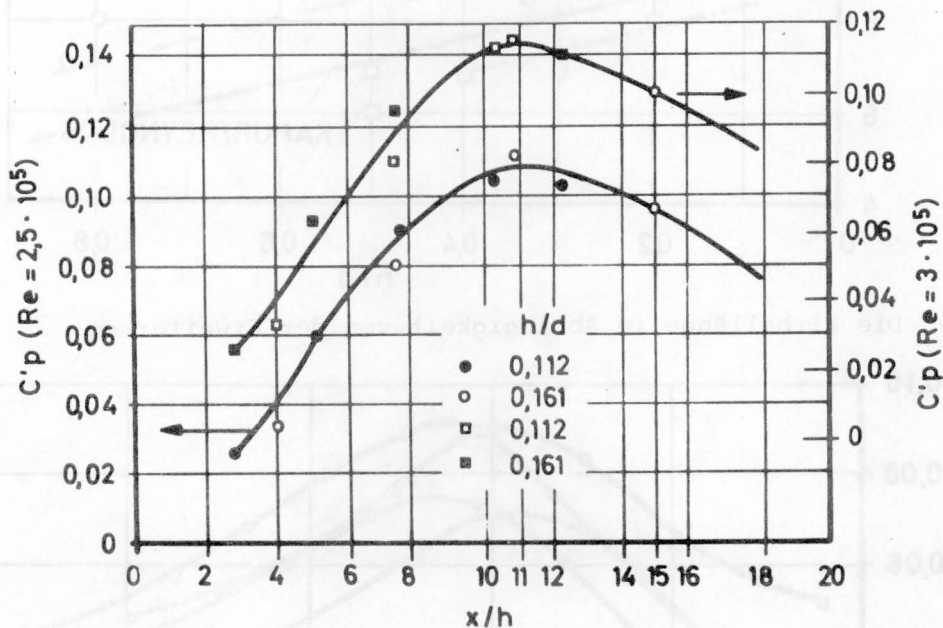


Abb. 3.24 Änderung der Druckschwankungen innerhalb der Rückströmungszone [29]

Die Meßergebnisse einer späteren Arbeit von NARAYANAN/REYNOLDS [31] sind neben den Ergebnissen anderer Autoren in der Abb. 3.25 eingetragen. Es scheint, daß die Wirbellänge bei Werten  $h/d < 0,2$  nicht mehr von der Wandhöhe abhängig ist.

Messungen der Druckfluktuationen

$$c'_p = \frac{\sqrt{p'^2}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (3.14)$$

zeigen ein Maximum bei  $0,8 > x/L > 0,9$ . Der Wert  $U_\infty$  ist hierbei die unter idealen Bedingungen errechnete Geschwindigkeit in der vena contracta nach der Formel

$$U_\infty = U_0 / (d-h) C \quad (3.15)$$

mit C als Kontraktionskoeffizient (Abb. 3.26).

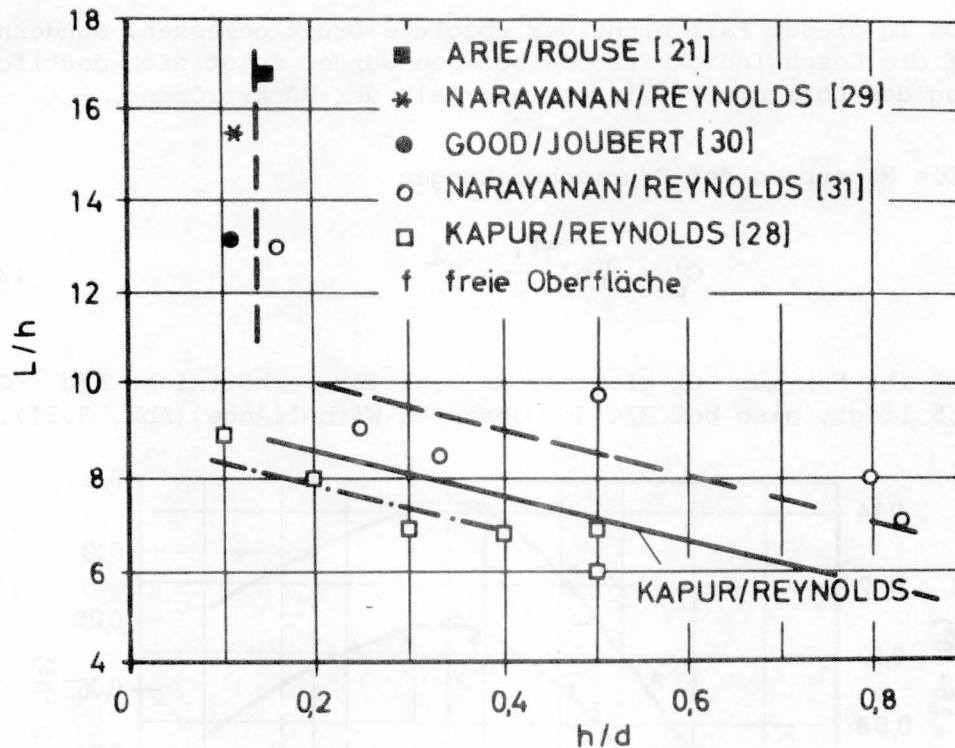


Abb. 3.25 Die Wirbellänge in Abhängigkeit von der Erweiterung

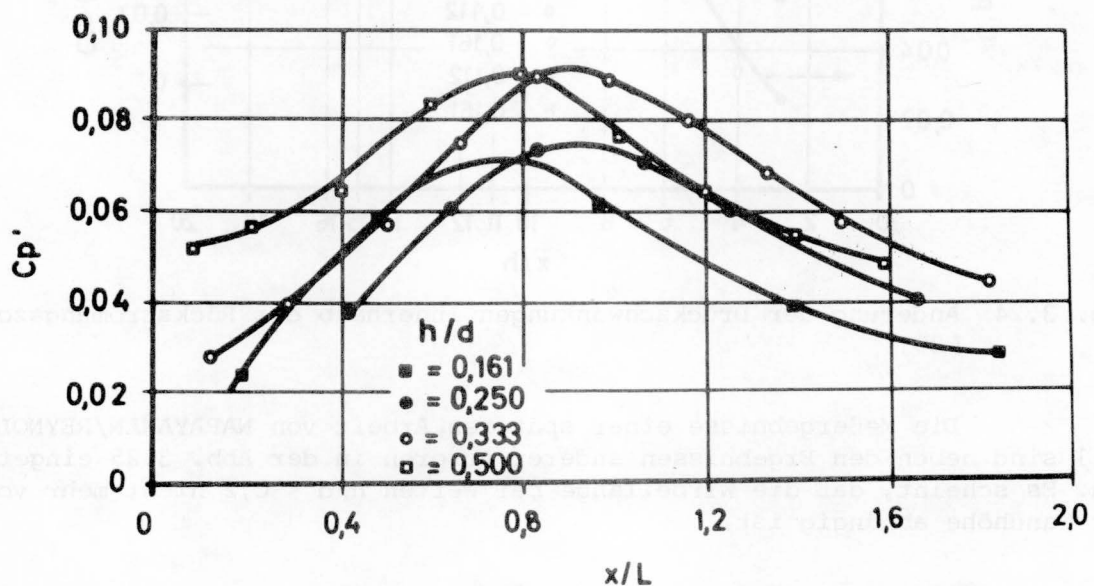


Abb. 3.26 Maximale Druckschwankungsintensitäten entlang der Rückströmung

Die Arbeit [31] zeigt weiterhin, daß ein Anwachsen der Grenzschichtdicke sowie eine Zunahme der Turbulenzintensität eine Verringerung der Wirbellänge bei gleicher Wandhöhe zur Folge hat. Die Ausbildung der Grenzschicht entlang des Wirbels beginnt bei  $x/h = 6$ , was mit der Beobachtung von ARIE/ROUSE [21] sehr gut übereinstimmt.

Bei größeren Verhältnissen  $h/d$ , d.h. bei stärkerer Einschnürung, entfernt sich der Maximalwert  $C_p'$  entsprechend der Abb. 3.27, was einer Erweiterung der Wirbelzone gleichkommt.

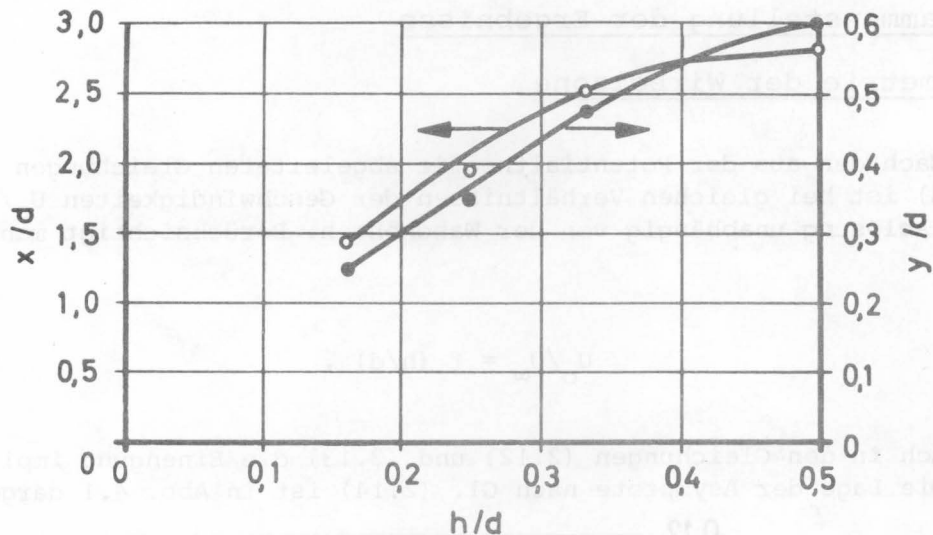


Abb. 3.27 Ort der maximalen Druckschwankung [31]

Aus den Frequenzspektren der Druckschwankungen lassen sich eindeutig zwei Bereiche abgrenzen (Abb. 3.28).

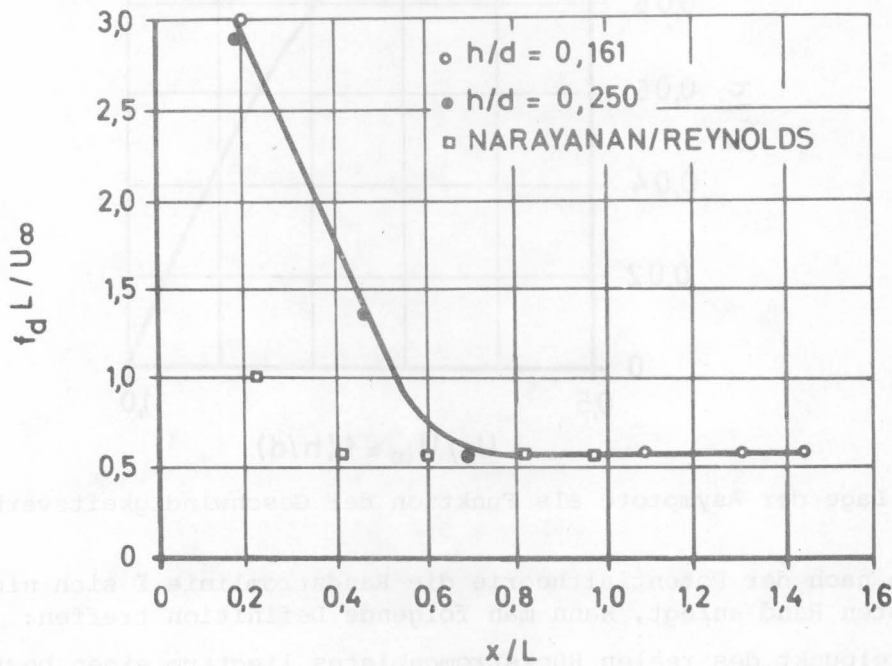


Abb. 3.28 Die Verteilung der maßgebenden Druckfrequenz entlang der Wirbelzone [31]

- Ein Gebiet nahe der Platte ( $x/L = 0,7$ ), wo die Maximalfrequenz mit dem Ort variiert.
- Ein Gebiet gegen Ende der Rückstromzone, wo die Frequenz unabhängig vom Ort ist. Dieses Gebiet ist charakterisiert durch die STROUHAL-Zahl

$$\frac{f_d L}{U_\infty} = 0,6.$$



#### 4. Zusammenstellung der Ergebnisse

##### 4.1 Geometrie der Wirbelzone

Nach den aus der Potentialtheorie abgeleiteten Gleichungen (2.12) und (2.13) ist bei gleichen Verhältnissen der Geschwindigkeiten  $U_0/U_\infty$  die Form der Ablösung unabhängig von der Wandhöhe  $h$ . Berücksichtigt man jedoch, daß

$$U_0/U_\infty = f(h/d),$$

so ist auch in den Gleichungen (2.12) und (2.13) die Einengung implizit enthalten. Die Lage der Asymptote nach Gl. (2.14) ist in Abb. 4.1 dargestellt.

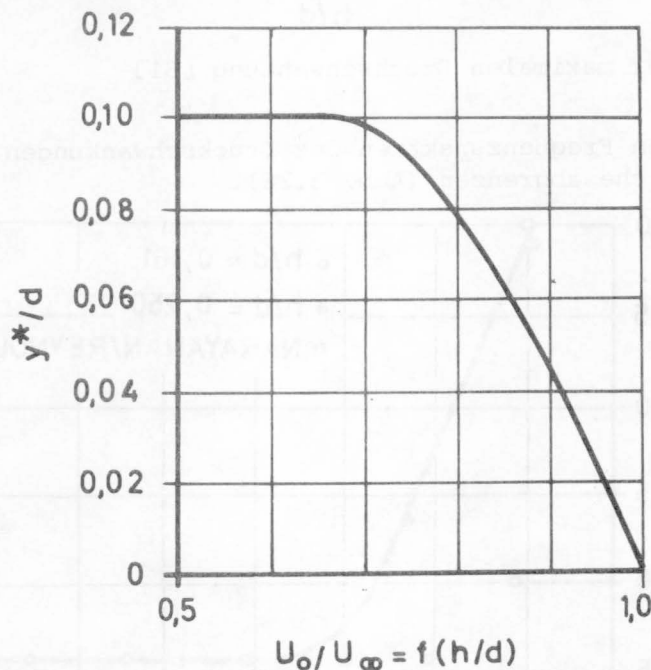


Abb. 4.1 Lage der Asymptote als Funktion der Geschwindigkeitsverhältnisse

Da nach der Potentialtheorie die Randstromlinie  $\Sigma$  sich nicht mehr an den festen Rand anlegt, kann man folgende Definition treffen:

Der Scheitelpunkt des realen Rückstromgebietes liegt um einen bestimmten Prozentsatz  $a$  unter der Asymptote nach Gl. (2.14):

$$a = (y_0^* - y^*)/y_0^*$$

Das bedeutet aber nach Abb. 4.1, daß die Ausdehnung der Diskontinuitätsfläche quer zur Fließrichtung von einem Verhältnis  $U_0/U_\infty < 0,7$  an praktisch konstant ist. In diesem Bereich ist auch nach Abb. 3.25 die Länge  $L$  unabhängig von der Einschnürung. Für geringe Einengungen ist nach Gl. (3.12) eine lineare Zunahme der maximalen Breite zu erwarten.

Gl. (3.15) läßt sich in die folgende Form bringen:

$$h = \frac{1}{c} \frac{U_0}{U_\infty} - d \quad (4.1)$$

Zusammen mit Gl. (3.12) erhält man

$$h^* = c^* \frac{U_0}{U_\infty} - d \quad (4.2)$$

$$c^* = 1,67/c$$

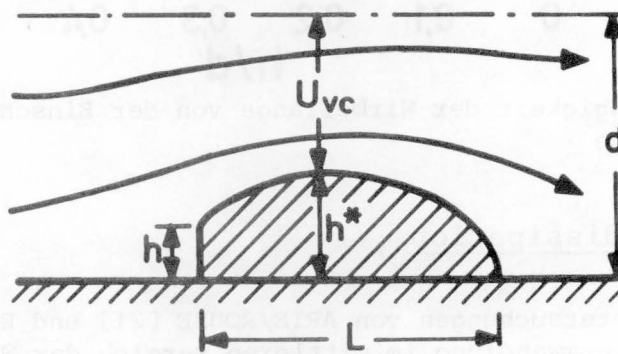


Abb. 4.2 Zur Definition der Gl. (4.2)

Bei geringen Einengungen, d.h. bei  $0,8 < U_0/U_\infty < 1$  ist in Gl. (2.14) der Wert  $\arctan \Pi \approx \text{const} = 1,5$ ; Gl. (2.14) geht in diesem Bereich in eine flache Parabel über, die jedoch genügend genau durch eine Gerade angenähert werden kann. Damit ist eine qualitative Übereinstimmung zwischen (2.14) und (3.12) gegeben.

In Bezug auf die Längenausdehnung  $L$  der Wirbelzone geht aus der Abb. 3.25 hervor, daß bei Einschnürungen  $0,1 < h/d < 0,4$  die Ergebnisse der Strömung mit freier Oberfläche und der Strömung mit nicht freier Oberfläche vergleichbar sind. Nach diesen Messungen kann man folgenden Ansatz machen:

$$\frac{L}{h} = A - K \cdot \frac{h}{d}, \quad (4.3)$$

wobei offenbar  $A$  den Wert  $L_0/h$  bei  $h/d \approx 0,1$  darstellt. Gl. (4.3) lautet dann:

$$\frac{L}{h} \approx 9 - 4,5 \frac{h}{d} \quad (4.4)$$

$$0,1 < h/d < 0,4$$

Gl. (4.4) soll nicht den exakten Zusammenhang beschreiben, sondern kann nur als Abschätzung dienen.

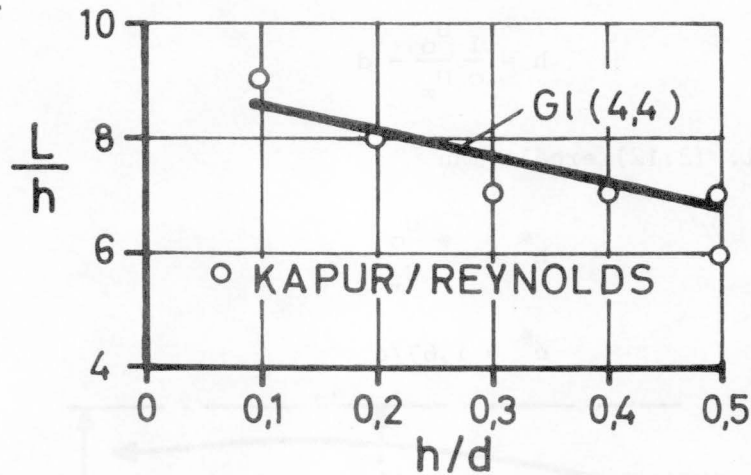


Abb. 4.3 Die Abhängigkeit der Wirbellänge von der Einschnürung bei freier Oberfläche

#### 4.2 Die Energiedissipation

Nach den Untersuchungen von ARIE/ROUSE [21] und ROUSE [22] findet die maximale Energieumwandlung im mittleren Bereich der Walze statt. Eine Abhängigkeit von der Höhe  $h$  wurde nicht untersucht.

Die Auswertung der Messergebnisse von PLATE [27] zeigt, daß eine starke Abhängigkeit zwischen der Wandhöhe und der Impulsverlustdicke besteht. Nach Gl. (2.34) ist aber bei konstantem  $U_0$  die Dissipationsrate direkt abhängig von der Impulsverlustdicke:

$$\epsilon_v = C \cdot f(1/\delta_2)$$

mit  $C$  als Konstanter. Aus der Abb. 4.4 ist daher abzulesen, daß die Dissipation mit zunehmendem Abstand von der Wand geringer wird und schließlich konstant bleibt. Gleichzeitig wird aber auch die Abhängigkeit von der Wandhöhe deutlich, obwohl nach Abb. 3.17 der Turbulenzgrad unabhängig von  $h$  ist.

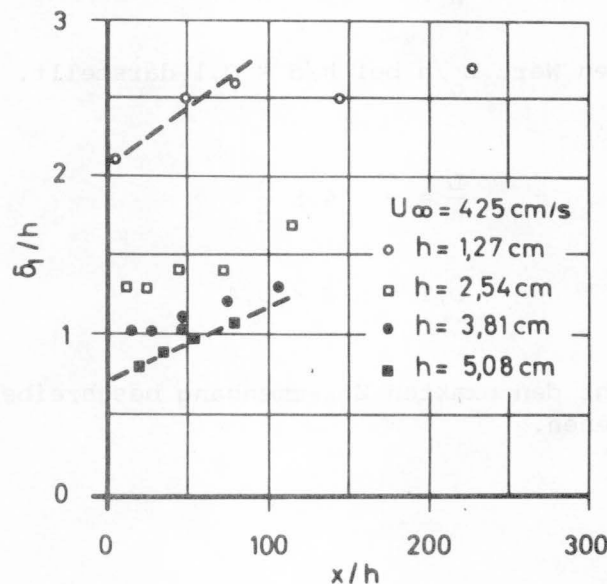


Abb. 4.4 Die Impulsverlustdicken nach Messungen von PLATE [27]

Der Zusammenhang wird noch deutlicher, wenn man für verschiedene Abstände  $x/h = \text{const}$  die Werte  $\delta_2/h$  gegen  $h$  aufträgt (Abb. 4.5). Es ist hier bemerkenswert, daß die Änderung  $d\delta_2/dh$  unabhängig vom Abstand  $x$  ist, d.h. an jeder Stelle  $x$  ist die Abnahme der Impulsverlustdicke gleich groß.

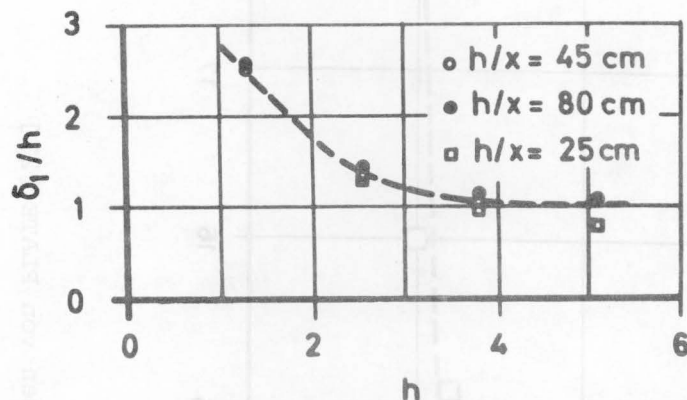


Abb. 4.5 Die Abnahme der Impulsverlustdicke mit der Wandhöhe

Die Abb. 4.6 zeigt das Verhalten der Verdrängungsdicke  $\delta_1$  mit zunehmendem Abstand  $h/x$ .

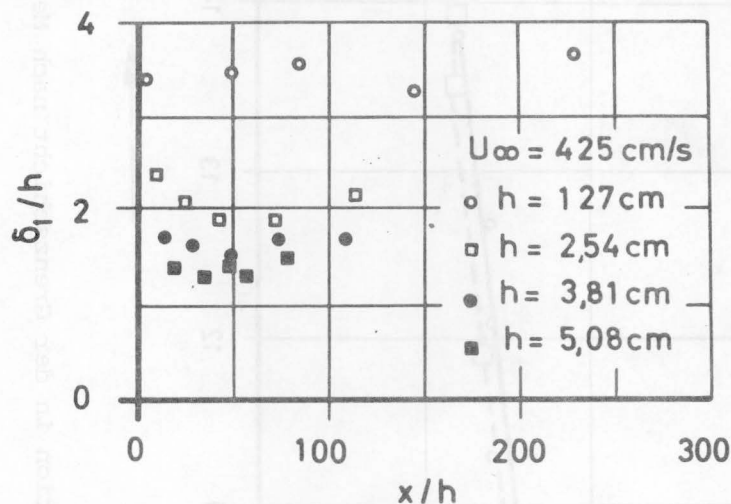


Abb. 4.6 Die Verdrängungsdicke nach Messungen von PLATE [27]

Eine einfache Gleichung für die Energieverluste gibt CHATURVEDI [23] an, indem er die Verluste als Prozentsatz der Energiehöhe errechnet, bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit vor der Wand:

$$\Delta H = \left( \frac{D_0}{D_1} \right)^4 \frac{U_0^2}{2g} \quad (4.4)$$

Die Abb. 4.7 zeigt die Energiedissipation, die nach Gl. (2.34) nach Messungen von PLATE [27] ermittelt wurde. Die Werte wurden in erheblichem Abstand hinter der Wand gemessen. Wie man sieht, ist die Energieumwandlung weitgehend unabhängig von der Wandhöhe, obwohl diese sich um den Faktor 4 unterscheiden.

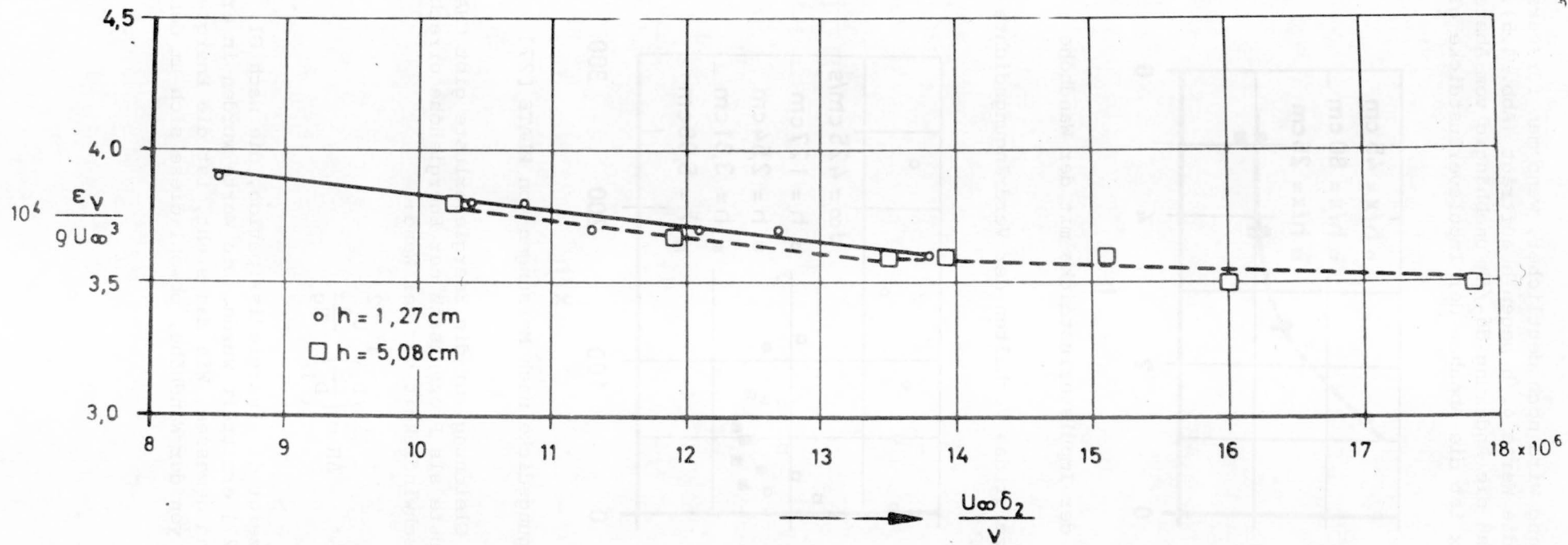


Abb. 4.7 Energiedissipation in der Grenzschicht nach Messergebnissen von PLATE [27]

## 5. Stabilitätsbetrachtung

Wie schon von HELMHOLTZ [2] ausgeführt wurde, ist die in Abschnitt 2.11 beschriebene Diskontinuitätsfläche äußerst labil. Die Bedingung, daß in der gesamten Fläche  $\Sigma$  gleicher Druck herrschen muß, ist praktisch nicht vorhanden. Druckschwankungen in den Gebieten  $G_0$  und  $G_1$  führen dazu, daß sich die Wirbelstärke in einzelnen Punkten der Wirbelschicht konzentriert, was dazu führt, daß sich die Diskontinuitätsfläche aufrollt und schließlich in Einzelwirbel aufgelöst wird, die mit der Strömung abschwimmen, wobei die Anordnung dieser Einzelwirbel unter gewissen Umständen stabile Formen annimmt [32].

Andererseits kann die Diskontinuitätsfläche auch Ausgangszustand eines relativ stabilen, stationären Einzelwirbels sein. Über die Stabilität eines solchen turbulenten Einzelwirbels geben die Gl. (2.40) und die Abb. 2.11 bzw. die Abb. 2.12 Aufschluß. Danach kann man sagen, daß einmal mit zunehmender Wirbelzähigkeit und zum anderen mit zunehmender Größe der Einzelwirbel schneller zerfällt.

Beobachtungen zeigen, daß ein ausgedehnter elliptischer Wirbel bestrebt ist, eine stabile Kreisform anzunehmen. Dies geschieht durch die Abspaltung einzelner kleiner Wirbel, die mit der Strömung abtreiben. Starke Einschnürungen haben eine Streckung des Rückstromgebietes zur Folge und gleichzeitig - wie Abb. 3.24 zeigt - eine Erhöhung der Druckfluktuationen, die proportional den Geschwindigkeitsschwankungen sind. Nach [31] bewirkt eine Zunahme der Turbulenzintensität aber eine Verkürzung des Rückstromgebietes. Dieses ist dadurch zu erklären, daß die hohe Turbulenzintensität der Außenströmung im Gebiet  $G_0$  übertragen wird in das Gebiet  $G_1$  des Wirbels, der durch seine Länge äußerst labil ist. Dadurch kommt es zur Abspaltung einzelner kleiner Wirbel und zu einer Verkürzung der Rückstromzone. Der Zusammenhang ist auch deutlich aus der Gl. (2.26) für den Formparameter  $\eta$  zu erkennen: Da mit stärkerer Einengung auch  $U_\infty$  wächst, wird der kritische Wert und damit der Punkt der Grenzschichtablösung näher an die Wand verlegt.

Durch die noch vorhandene Einschnürung und der damit verbundenen hohen turbulenten Schubspannung baut sich der Wirbel - wie in Abschnitt 2.23 beschrieben - sofort wieder in seiner gestreckten Form auf. Damit kommt es zu periodischen Pulsationen in  $G_1$ , was zu transversalen Schwingungen der Stromfäden in  $G_0$  führt. Die Frequenz ist offensichtlich umso höher, je stärker die Einengung ist. Der Vorgang wird vermutlich durch die STROUHAL-Zahl

$$S = \frac{\Delta \cdot f}{U_\infty}$$

beschrieben mit  $\Delta = d - h$  und  $f$  als Frequenz der Pulsation.



## 6. Zusammenfassung

Eine Untersuchung der Ablösewirbel anhand der Literatur hat gezeigt, daß sich sowohl die Geometrie als auch die Dissipation soweit in Gleichungen fassen lassen, daß eine Anwendung auf den praktischen Fall sinnvoll ist. Bei kleinen Einschnürungsverhältnissen kann man zur Ermittlung der Breite der Wirbelzone die Potentialtheorie heranziehen. Damit ist bei der Berechnung von Bühnenstrecken die in der Einleitung genannte Forderung nach Trennung zwischen Rauigkeit und Geometrie erfüllt: Die Bühnen und ihre Totwasserzonen können der Gerinnegeometrie zugerechnet werden und die Dissipation infolge Bettrauhigkeit wird im Bereich der Walzen um die zusätzliche Dissipation der Wirbel erhöht.

Eine qualitative Stabilitätsbetrachtung zeigt, daß die Rückströmungszonen im allgemeinen nicht stabil sind. Relativ stabile Verhältnisse wird man nur bei geringen Einschnürungen finden.

7. Bezeichnungen

$c_p$	dimensionsloser Wanddruck
$c'_p$	dimensionslose Druckfluktuationen
$d$	Kanalbreite
$h$	Wandhöhe
$h^*$	maximale Breite der Wirbelzone
$i$	$= \sqrt{-1}$
$m(x)$	Dipolstärke
$p'$	Druckfluktuationen
$r$	Wirbelradius
$r_m$	Wirbelradius am Ort der maximalen Geschwindigkeit
$t$	Zeit
$\bar{u}, \bar{v}$	Mittelwerte der örtlichen Geschwindigkeiten
$u', v'$	turbulente Geschwindigkeitsschwankungen
$u_t(r)$	Tangentialgeschwindigkeit im Wirbel
$u_{tr}$	Umfangsgeschwindigkeit
$u_{tm}$	maximale Umfangsgeschwindigkeit
$u_{t0}$	Tangentialgeschwindigkeit zur Zeit $t=0$
$u_*$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$x, y$	Koordinaten
$E_k, E_p, E_\tau, E_t$	Energieanteile der turbulenten Strömung
$G_o$	Gebiet außerhalb der Wirbelzone (Außenströmung)
$G_1$	Gebiet in der Wirbelzone
$H_{12}$	Formparameter der Grenzschicht
$\Delta H$	Energieverlusthöhe
$L$	Länge der Wirbelzone
$Re_w$	$= u_{tm} \cdot r_m / \nu$ REYNOLDS'sche Zahl des Wirbels
$Re_{w0}$	$= Re_w \text{ } t=0$
$U_o$	Anströmungsgeschwindigkeit vor der Wand
$U_\infty$	Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht bzw. Wirbelzone, wo $\partial u / \partial y = 0$
$\tilde{U}$	$= u_{tr} / u_{tm}$ dimensionslose Umfangsgeschwindigkeit
$\vec{r}$	Radiusvektor
$\vec{v}, \vec{w}$	Vektoren des Geschwindigkeitsfeldes
$\delta(x)$	Grenzschichtdicke
$\delta_1(x)$	Verdrängungsdicke
$\delta_2(x)$	Impulsverlustdicke
$\epsilon_v$	Energieanteil der viskosen Dissipation

$\varepsilon_t$	Anteil der Turbulenzenergie
$\phi(x,y)$	Stromfunktion
$\Psi(x,y)$	Potentialfunktion
$\eta$	Formparameter der Grenzschicht
$\lambda$	Mikromaßstab der Turbulenz
$\tau$	Örtliche turbulente Schubspannung
$\tau_o$	turbulente Wandschubspannung
$\rho$	Flüssigkeitsdichte
$\nu$	molekulare Zähigkeit
$\nu_w$	Wirbelzähigkeit
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit
$\Phi(x,y)$	Geschwindigkeitspotential
$\Gamma$	Zirkulation
$\Sigma$	Diskontinuitätsfläche
$\Sigma'$	Rand der Wirbelzone
$\theta$	3/4-Wertzeit der turbulenten Wirbel (Zerfallzeit)
$\Omega$	Wirbelstärke

## 8. Schrifttum

- [1] LICHENSTEIN, L. : Grundlagen der Hydromechanik. Berlin: Verlag von Julius Springer (1929), Nachdruck 1968
- [2] HEIMHOLTZ, H.v. : Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. Monatsber. der Akad. der Wiss., Berlin (1868) S.215-229
- [3] KIRCHHOFF, G. : Zur Theorie des freien Flüssigkeitsstrahles. J. f. reine und angew. Math. 70 (1869)
- [4] LAMB, H. : Lehrbuch der Hydromechanik. Leipzig/Berlin: Teubner Verlag (1908)
- [5] BETZ, A. : Konforme Abbildungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag (1964)
- [6] HEIMHOLTZ, H.v. : Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche Wirbelbewegungen entsprechen. J.f.reine und angew. Math., 55 (1858) S.25-55
- [7] LAGALLY, M. : Ideale Flüssigkeiten. In: Geiger-Scheel: Handbuch der Physik Bd. VII Berlin: Springer-Verlag (1927)
- [8] PRANDTL, L. : Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh.d.III.Internat. Mathematiker Kongr., Heidelberg (1904)
- [9] KROSIGK, S.v. : Die Kinematik der Wasserwalzen mit lotrechter Achse. 153. Arbeit aus dem Theodor-Rehbock-Flußbaulaboratorium der TH Karlsruhe (1964)
- [10] ROUSE, H. : On the role of eddies in fluid motion. American Scientist (1963) S.285-314
- [11] MORGENSTERN, D./SZABO, I. : Vorlesungen über theoretische Mechanik. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag (1961)
- [12] SCHLICHTING, H. : Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe:Verlag G.Braun (1965)
- [13] POLHAUSEN, K. : Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. ZAMM 1 (1924) 4 S.252-268
- [14] ROTTA, J. : Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten. Ingenieur-Archiv 20 (1952) S.195-207
- [15] ROTTA, J. : Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten. Ingenieur-Archiv 19 (1951) S.31-41
- [16] ROSENHEAD, L. : Laminar boundary layers. Oxford: Clarendon Press (1963)

- [17] MÜLLER, W. : Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft (1932)
- [18] FOCKE, S. : Struktur und Entwicklung des ebenen, turbulenten Einzelwirbels. Monatsber. Dt. Akad. Wiss., Berlin 12 (1970) S.545-556
- [19] FOCKE, S. : Über die zeitliche Weiterentwicklung turbulenter Wirbel. Wissenschaftl. Zeitschrift TH Dresden 16 (1967) 4, S.1217-1219
- [20] HOFFMANN, E.R./ : Turbulent line vortices. J. of Fluid Mech.  
JOUBERT, P.N. 43 (1963) pp.395-411
- [21] ARIE, M./ : Experiments on two dimensional flow over a  
ROUSE, H. normal wall. J. of Fluid Mech. 1 (1956)  
pp. 126-141
- [22] ROUSE, H. : Energie transformation in zones of separation.  
9th Congress of IAHR Dubrovnik (1961) 1291-1302
- [23] CHATURVEDI, M.C. : Flow characteristics of axisymmetric expansions. J. Hydr. Div. Proc. ASCE, Vol.89 (1963)  
Nr. HY 3 pp. 61-92
- [24] CHEVRAY, R. : L'Application du Théorème de BERNOULLI dans  
les zones de décollement. La Houille Blanche  
(1964) Nr.6, p. 671-684
- [25] ROUSE, H./ : Fluktuation of pressure in conduit expansions.  
JEZDINSKY, V. J. Hydr. Div. Proc. ASCE, Vol.92 (1966) HY 3,  
pp. 1-12
- [26] HINZE, J.O. : Turbulence. New York/London/Toronto: McGraw-Hill (1959)
- [27] PLATE, E. : Beitrag zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit in der durch eine Wand gestörten bodennahen Luftschicht. Mitt.d.Inst. f. Wasserwirtschaft, Grundbau und Wasserbau der TH Stuttgart, H.5 (1967)
- [28] KAPUR, A.D./ : Reattachment downstream of a control gate.  
REYNOLDS, A.J. J.Hydr. Res. 5 (1967) 1 pp. 1-14
- [29] NARAYANAN, R./ : Pressure fluctuations in reattaching flow.  
REYNOLDS, A.J. J.Hydr. Div. Proc. ASCE, Vol.94 (1968)  
Nr. HY 4 pp 1383-1398
- [30] GOOD, M.C./ : The form drag of two - dimensional bluff -  
JOUBERT, P.N. plates immersed in turbulent boundary layers.  
J.Fluid Mech. 31 (1968) 3 pp. 547-582
- [31] NARAYANAN, R. : Reattaching flow downstream of leaf gate.  
REYNOLDS, A.J. J.Hydr. Div. Proc. ASCE, Vol.98 (1972)  
Nr. HY 5, pp. 913-934
- [32] KARMAN, Th.v. : Über den Mechanismus des Flüssigkeits- u.  
Luftwiderstandes. Phys.Z.13 (1912) 2 S.49-59.